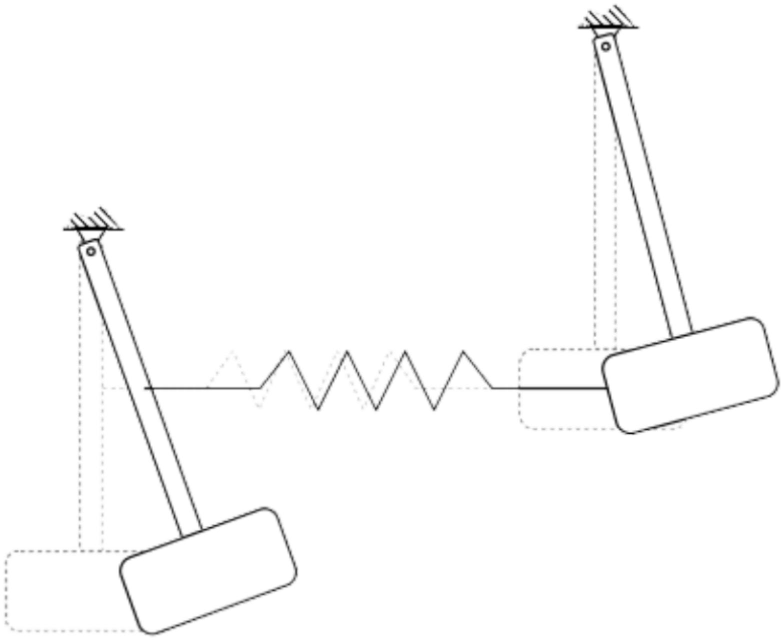
Questão 1

O sistema tem claramente dois graus de liberdade, e as coordenadas generalizadas mais naturais para representá-lo são os ângulos de rotação das barras em relação a vertical, que é considerada a posição de repouso do sistema.



Vamos chamar de θ_1 o ângulo da barra esquerda e θ_2 o ângulo da barra direita, e vamos considerar que as barras não tem massa e que as massas nas extremidades são pequenas o suficiente para serem consideras concentradas.

Como sempre, qualquer coisa um pouco mais estranha é melhor resolvida pelas equações de Euler-Lagrange, vamos então calcular as energias cinética e potencial do sistema.

A energia cinética pode ser calculada muito rapidamente,

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2.$$

Daí fica claro que o momento de inércia de massa de uma massa concentrada que gira a uma distância l do centro de rotação é $1/2ml^2$, conforme foi informado em sala e demonstrado aqui que é uma informação completamente desnecessária.

A energia potencial é armazenada no campo gravitacional e na mola, podemos escrever, considerando pequenas rotações, então

$$V = m_1 gl(1-\cos\theta_1) + m_2 gl(1-\cos\theta_2) + \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}l\theta_1 - l\theta_2\right)^2,$$

Escrevendo as equações de E-L na ausências de forças não conservativas e para as coordenadas generalizadas deste problema,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad q_i = \theta_1, \theta_2,$$

podemos facilmente estabelecer as equações de movimento para cada coordenada generalizada.

Para $q_j = \theta_1$,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l^2 \dot{\theta}_1,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l^2 \ddot{\theta}_1,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = m_1 g l \sin\theta_1 + \frac{kl^2}{2}\left(\frac{\theta_1}{2} - \theta_2\right),$$

assim, ficamos com

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l \sin\theta_1 + \frac{kl^2}{2}\left(\frac{\theta_1}{2} - \theta_2\right) = 0,$$

que linearizamos para

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l \theta_1 + \frac{kl^2}{2}\left(\frac{\theta_1}{2} - \theta_2\right) = 0,$$

ou

$$m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + \left(m_1 g l + \frac{kl^2}{4}\right)\theta_1 - \frac{kl^2}{2}\theta_2 = 0,$$

Para $q_j = \theta_2$,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l^2 \dot{\theta}_2,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l^2 \ddot{\theta}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = m_2 g l \sin\theta_2 - k l^2 \left(\frac{\theta_1}{2} - \theta_2\right),$$

assim, ficamos com

$$m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l \sin\theta_2 - k l^2 \left(\frac{\theta_1}{2} - \theta_2\right) = 0,$$

que linearizamos para

$$m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l \theta_2 - k l^2 \left(\frac{\theta_1}{2} - \theta_2\right) = 0,$$

ou

$$m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 - \frac{k l^2}{2}\theta_1 + \left(m_2 g l + k l^2\right)\theta_2 = 0,$$

Podemos colocar as duas equações, que formam um sistema de equações algébricas lineares, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 g l + k l^2/4 & -k l^2/2 \\ -k l^2/2 & m_2 g l + k l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Supondo que as respostas sejam harmônicas e em fase, $\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\Theta}\cos(\omega t + \phi)$, ficamos com

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 g l + k l^2/4 & -k l^2/2 \\ -k l^2/2 & m_2 g l + k l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{bmatrix} m_1 g l + k l^2/4 - \omega^2 m_1 l^2 & -k l^2/2 \\ -k l^2/2 & m_2 g l + k l^2 - \omega^2 m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que é um sistema homogêneo que só tem solução quando seu determinante for nulo. Como temos valores numéricos para tudo, fica mais rápido fazer as contas numericamente.

In [4]:
```
l = 0.5
m1 = 1
m2 = 2
k=1350
g=9.8
M = matrix( [[ m1*l^2, 0], [ 0, m2*l^2]])
show(M)
```

$$\begin{pmatrix} 0.250000000000000 & 0.000000000000000 \\ 0.000000000000000 & 0.500000000000000 \end{pmatrix}$$

In [6]:
```
K = matrix([[m1*g*l+k*l^2/4, -k*l^2/2],[ -k*l^2/2, m2*g*l+k*l^2]])
show(K)
```

$$\begin{pmatrix} 89.2750000000000 & -168.750000000000 \\ -168.750000000000 & 347.300000000000 \end{pmatrix}$$

In [8]:
```
var('w')
Z = K-w^2*M
show(Z)
```

$$\Big(-0.250000000000000\, w^2 + 89.2750000000000 \quad -16$$
$$-168.750000000000 \quad -0.500000000000000\, w^2 + 34$$

In [12]:
```
d = det(Z).expand()
show(d)
```

$$0.125000000000000\, w^4 - 131.462500000000\, w^2 + 2528.64500000000$$

Que é uma equação biquadratica que pode ser resolvida para ω^2,

In [22]:
```
n = var("eta")
eq = d.subs(w^4==eta^2, w^2==eta)
show(eq)
```

$$0.125000000000000\, \eta^2 - 131.462500000000\, \eta + 2528.64500000000$$

In [24]:
```
sols = solve(eq, eta)
show(sols)
```

$$\left[\eta = \left(\frac{98}{5}\right), \eta = \left(\frac{10321}{10}\right)\right]$$

In [31]:
```
n1 = N(sols[0].rhs())
n2 = N(sols[1].rhs())
show((n1, n2))
w1 = sqrt(n1)
w2 = sqrt(n2)
show((w1, w2))
```

$$(19.6000000000000, 1032.10000000000)$$

$$(4.42718872423573, 32.1263132027315)$$

Estas são as frequências naturais. Vamos calcular os modos normais, usando a matriz $\boldsymbol{Z}$.

In [42]:
```
Z1 = Z(w=w1)
var('Theta1, Theta2')
x = matrix([[Theta1],[Theta2]])
P = Z1*x
show(P)
```

$$\begin{pmatrix} 84.3750000000000\,\Theta_1 - 168.750000000000\,\Theta_2 \\ -168.750000000000\,\Theta_1 + 337.500000000000\,\Theta_2 \end{pmatrix}$$

Igualando a primeira linha a 0, podemos calcular $r_1 = \Theta_2^1/\Theta_1^1$,

In [47]:
```
r1 = -Z1[0][0]/Z1[0][1]
show(r1)
```

$$0.500000000000000$$

Repetindo para a segunda frequência,

In [48]:
```
Z2 = Z(w=w2)
P = Z2*x
show(P)
```

$$\begin{pmatrix} -168.750000000000\,\Theta_1 - 168.750000000000\,\Theta_2 \\ -168.750000000000\,\Theta_1 - 168.750000000000\,\Theta_2 \end{pmatrix}$$

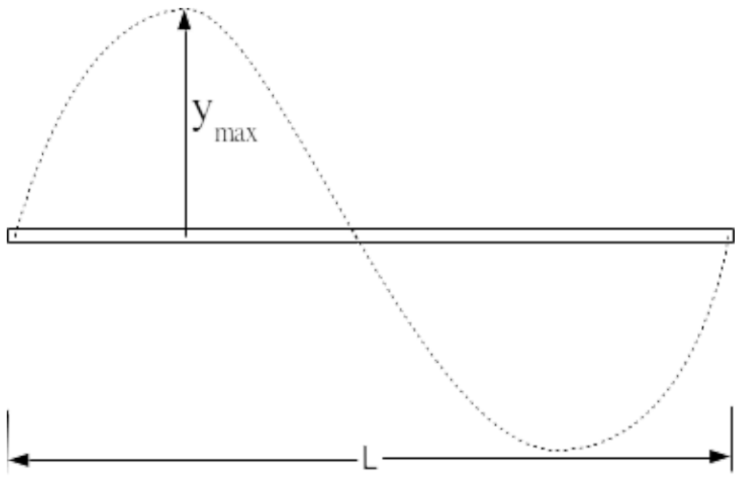
In [50]:
```
r2 = -Z2[0][0]/Z2[0][1]
show(r2)
```

$$-1.00000000000000$$

Então no primeiro modo a massa 2 oscila com a metade da amplitude da primeira, na mesma direção, enquanto que no modo 2, as massas oscilam com a mesma amplitude, em direções opostas.

Questão 2

Temos a seguinte configuração, onde a linha tracejada representa o deslocamento transversal da viga.



Como é usual, vamos considerar um elemento de barra infinitesimal, de comprimento dx, na posição x, com massa $dm = \rho dx$, onde $\rho = M/L$ é a densidade linear.

Para calcular a massa equivalente, vamos considerar a equivalência de energias cinéticas a um sistema que vibre com amplitude igual a y_m (vamos mudar o nome da figura de $y_{\max}$ para y_m para poder escrever mais rapidamente.

A energia cinética de um elemento de massa em vibração transversal é

$$dT = \frac{1}{2} dm\, \dot{y}(x)^2,$$

onde $\dot{y}(x)$ é a velocidade transversal do elemento de massa. Como sempre, vamos admitir que todos os pontos do sistema vibram em fase e com a mesma frequência, $y(x,t) = Y(x)\cos\omega t$. É dito no enunciado que a configuração da barra é senoidal, com um nó, como mostrado acima. É obvio que a equação do deslocamento lateral neste caso é $Y(x) = y_m \sin(2\pi x/L)$.

O deslocamento da barra então é $y(x,t) = y_m \sin(2\pi x/L)\cos\omega t$, a velocidade é $\dot{y}(x,t) = -\omega y_m \sin(2\pi x/L)\sin\omega t$ e como tudo está em fase o módulo da velocidade máxima em cada ponto é $\dot{y}_{\max}(x) = \omega y_m \sin(2\pi x/L)$.

Assim, a energia cinética máxima de cada elemento de barra é

$$dT = \frac{1}{2} dm \left(\omega y_m \sin(2\pi x/L)\right)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 y_m^2 \sin^2(2\pi x/L)\rho\, dx,$$

A energia cinética total da barra é dada pela integral deste termo ao longo da barra,

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\omega^2 y_m^2 \sin^2(2\pi x/L)\rho\, dx = \frac{1}{2}\omega^2 y_m^2 \rho \int_0^l \sin^2(2\pi x/L)\, dx = \frac{1}{2}\omega^2 y_m^2 \rho \frac{L}{2} = \frac{1}{2}\omega^2 y_m^2 \frac{M}{2},$$

onde usamos o fato de que $M = \rho L$. Igualando esta energia cinética à de um sistema equivalente que vibre com a mesma frequência e amplitude, ficamos com

$$\frac{1}{2} m_{\text{eq}} \omega^2 y_m^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{2}\omega^2 y_m^2,$$

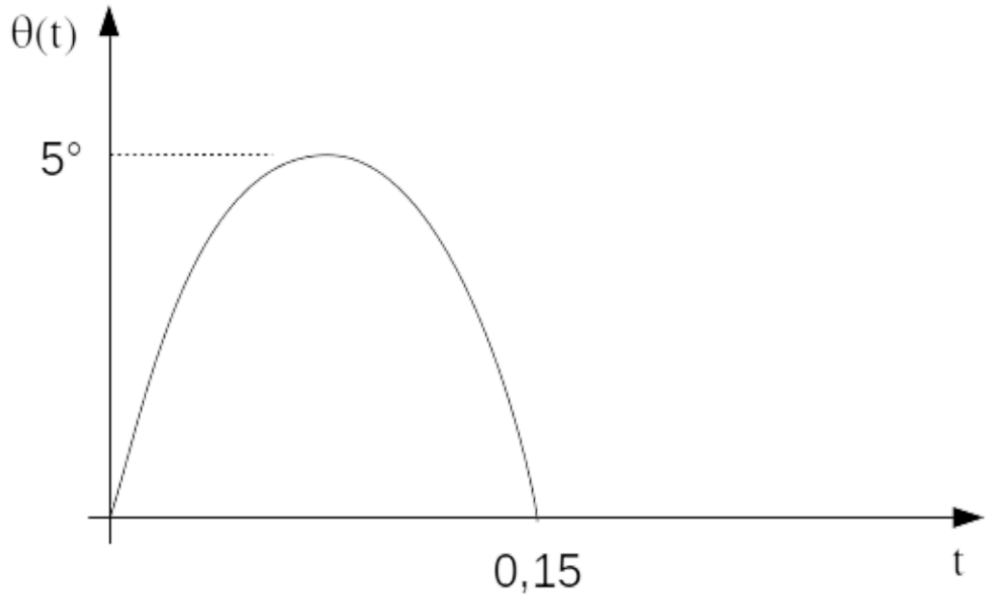
de onde é claro que

$$m_{\text{eq}} = \frac{M}{2}.$$

Esta questão é bem fácil e não é necessário saber nada sobre sistemas contínuos, muito menos sobre vibração transversal de vigas, para resolvê-la.

Questão 3

De acordo com o enunciado, a entrada é dada por uma rotação da extremidade livre que tem a forma mostrada na figura abaixo.



Como estamos querendo calcular a resposta a um movimento impulsivo na base, observando o formulário notamos que a única coisa disponível que serve para este caso e para a qual temos toda a informação que precisamos é a integral de convolução, então é o que vamos usar para este problema.

Temos que a resposta para o **movimento relativo** entre a base a massa é dada por

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau,$$

mas, no caso, muito para nossa alegria, não há mençao de amortecimento, então podemos considerar $\zeta = 0$, e a expressão torna-se

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^t \ddot{y}(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau,$$

Como o deslocalmento é um meio pulso senoidal, podemos descrevê-lo com a equação

$$\theta(t) = A \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

onde usamos T para o período para não confundir com o τ da integral de convolução. A derivada segunda disto em relação ao tempo é, sem surpresas,

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

Antes de colocarmos isto na integral de convolução precisamos calcular a frequência natural do sistema, $\omega_n = sqrt k_t / J_0$, já que estamos tratando de um sistema rotativo.

Do formulário, temos que a rigidez em torção é dada por $k_t = GJ/L$, com $J = \pi D^4/32$ para uma barra de sessão circular, e além disto, para um disco em rotação, $J_0 = 1/2\, MR^2$.

In [58]:
```
# Para a àrvore
L = 0.4
D = 0.010
J = N(pi)*D^4/32
show(J)
G = 80e9
kt = G*J/L
show(kt)
```

$$9.81747704246810 \times 10^{-10}$$

$$196.349540849362$$

In [59]:
```
# Para o volante
m = 2
d = 0.30
r = d/2
J0 = 0.5*m*r^2
show(J0)
```

$$0.0225000000000000$$

In [61]:
```
wn = sqrt(kt/J0)
show(wn)
taun = 2*N(pi)/wn
show(taun)
```

$$93.4165202732988$$

$$0.0672598945967751$$

O período natural é 0,07 segundos, aproximadamente, então o pulso dura mais ou menos dois períodos naturais.

Vamos colocar a entrada na integral de convolução,

$$z(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \frac{4\pi^2}{T^2} A \sin \frac{2\pi}{T} \tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau,$$

e vamos definir $\omega = 2\pi/T$ para encurtar as expressões,

$$z(t) = A \frac{\omega^2}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega\tau \sin \omega_n (t - \tau) d\tau,$$

$$z(t) = A \frac{\omega^2}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega\tau \sin(\omega_n t - \omega_n \tau) d\tau,$$

Infelizmente esta integral não é trivial e não é possível de ser realizada com a fórmula que é dada no formulário. Como ninguém reclamou na hora da prova, vamos ver o que vocês aprontaram. Vou ser bem compreensivo.

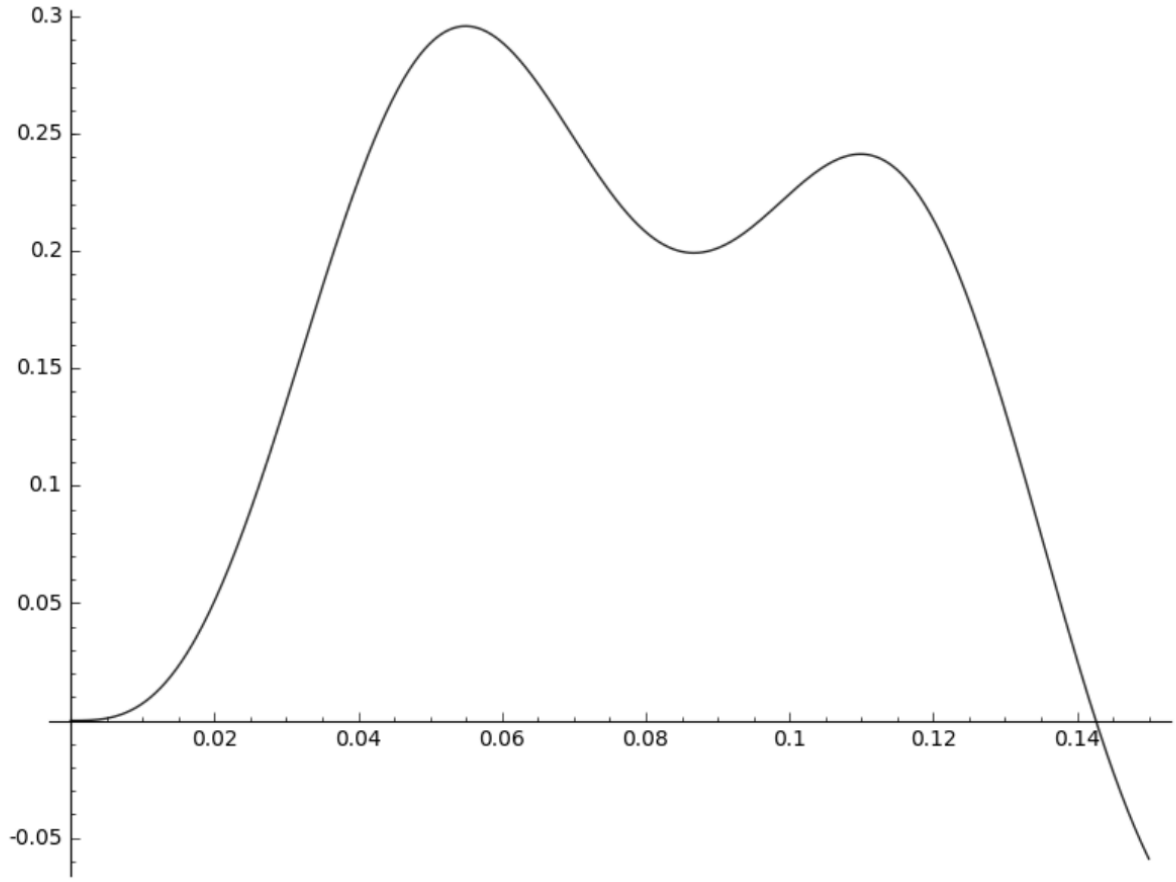
Realizando a integral, ficamos com

$$z(t) = \frac{\omega^2 A}{\omega_n (\omega^2 - \omega_n^2)} \left(\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t \right),$$

Podemos colocar os valores numéricos para ver como isto fica.

In [77]:
```
T=0.30
w = 2*N(pi)/T
A = 5
Ampl = w^2*A/(wn*(w^2-wn^2))
z(t) = Ampl*(w*sin(wn*t)-wn*sin(w*t))
plot(z(t), (t, 0, 0.15))
```

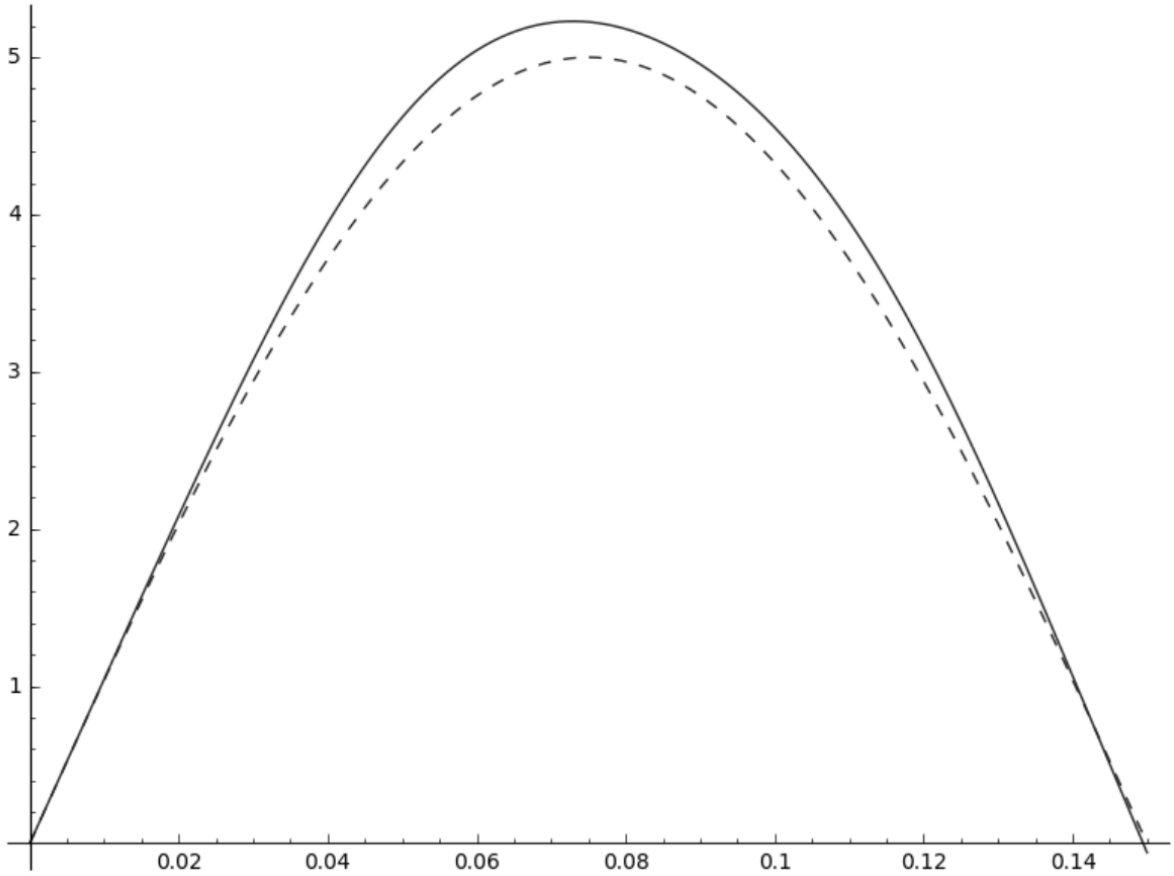
Out[77]:



Duas observações importantes:

1. O deslocamento calculado é relativo, isto é, falta somar a entrada, o que faremos a seguir.
2. O deslocamento calculado só é válido para o período de aplicação do pulso, após o seu término o sistema está em vibração livre não amortecida com as condições iniciais correspondentes ao deslocamento e velocidade no final do pulso.

In [83]:
```
y(t) = 5*sin(w*t)
r(t) = y(t)+z(t)
p1 = plot(r(t), (t, 0, 0.15))
p2 = plot(y(t), (t, 0, 0.15), linestyle="--")
show(p1+p2)
```



Na figura acima, o deslocamento na entrada é dado pela linha tracejada e o deslocamento do volante pela linha sólida. Observamos no final das contas que o sistema é bem rígido, já que não há tanta diferença entre os dois movimentos.