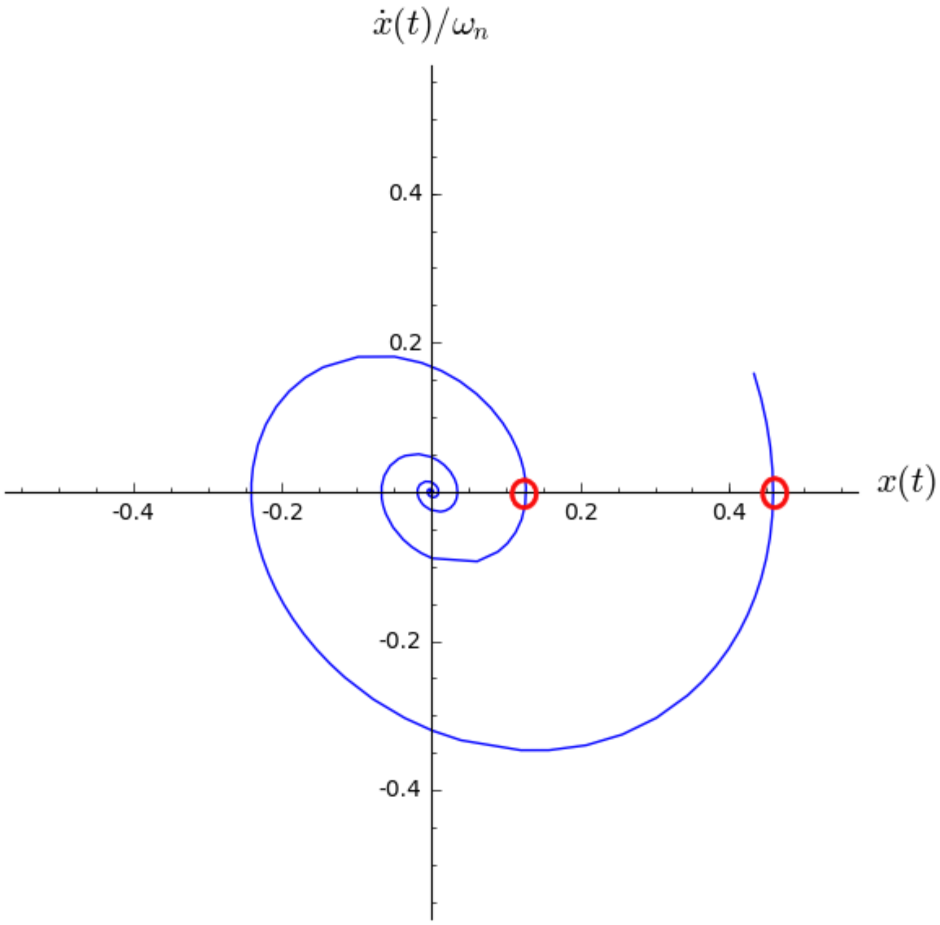
Questão 1

A figura é um gráfico da velocidade adimensionalizada contra o deslocamento, parametrizados em função do tempo. Claramente, é um plano de fase.



Estamos procurando a razão de amortecimento. O amortecimento é uma grandeza que afeta primordialmente o decaimento da amplitude em um sistema em vibração livre amortecida, e, particularmente, sabemos que a razão de amortecimento está ligada ao decremento logaritimico pela fórmula dada no formulário

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

com o decremento logaritmico dado por (também no formulário)

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_n}{x_{n+1}}.$$

Podemos usar $n = 1$ na fórmula acima, para ter a razão de amplitudes *em pontos correspondentes de ciclos consecutivos*, dada por

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2}.$$

Esta razão aplica-se a qualquer dois pontos correspondentes, conforme comentado em sala de aula, mas, em particular e para facilitar, podemos tomá-la entre dois pontos onde o deslocamento é um máximo positivo, que corresponde a dois pontos com derivada nula, isto é, velocidade nula. Temos dois pontos como estes marcados na figura acima.

Podemos tirar do gráfico rapidamente que $x_1 = 0.451$ e $x_2 = 0.125$, aproximadamente, e com isto podemos calcular δ e ζ. Explicitando ζ em função de δ ficamos com

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}.$$

In [1]:
```
x1=0.451
x2=0.125
delta = ln(x1/x2)
zeta = N(delta/sqrt(4*pi**2+delta**2))
show((zeta, delta))
```

$$(0.200090383199088, 1.28315360220038)$$

A razão de amortecimento é portanto 20%, aproximadamente. Note que se calcularmos com a fórmula aproximada $\zeta = \delta/(2\pi)$, obtemos

In [2]:
```
show(N(delta/(2*pi)))
```

$$0.204220238536362$$

que é uma aproximação *extremamente* razoável em termos de engenharia. Novamente, vale apenas observar como a amplitude de vibração cai muito rapidamente, para um valor aparentemente baixo, da ordem de 20% do amortecimento crítico.

Sabemos que um ciclo completo do movimento ocorre em $\tau_d = 1.013$ segundos. Entenda que este é o período de vibração livre *amortecida*. A frequência de vibração livre amortecida e a frequência natural do sistema estão relacionadas por $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

No caso então,

In [3]:
```
taud=1.013
wd = N(2*pi)/taud
wn = wd/sqrt(1-zeta**2)
show((wn, wd))
```

$$(6.33057249013100, 6.20255212949614)$$

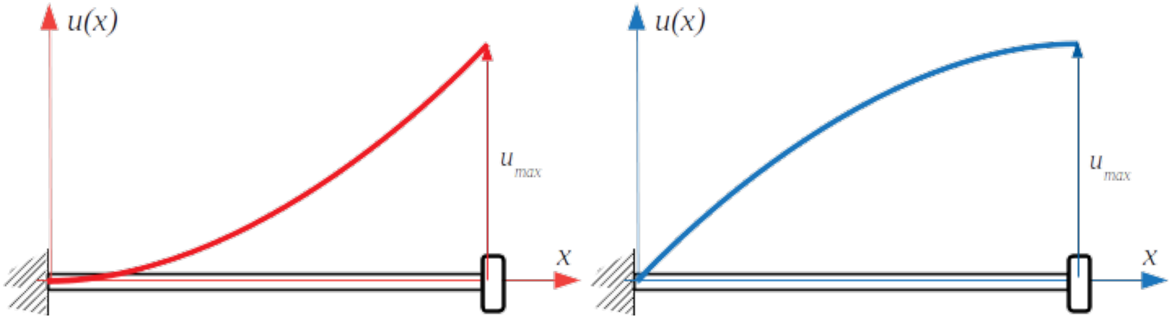
Vale notar que a diferença entre as frequência é bem pequena.

Questão 2

O enunciado diz que podemos aproximar a vibração longitudinal de uma barra engastada livre por uma função quadrática (vimos que isto não é verdade, os modos de vibração são senoidais, mas isto não é importante agora.)

Uma função quadrática tem a forma $u(x) = ax^2 + bx + c$, e precisamos calcular estes coeficientes em função do deslocamento máximo na extremidade da barra.

Obviamente, com um pouco de bom senso, podemos determinar duas condições de contorno óbvias, o deslocamento é nulo na extremidade engastada e máximo na extremidade livre, mas isto ainda deixa duas configurações possíveis, como mostrado na figura abaixo.



Como vimos muito mais à frente no curso, é claro que a configuração em vermelho não é possível, pois a derivada nula na origem implicaria uma força nula ali, o que não faz sentido. De qualquer forma, vamos considerar qualquer uma das escolhas como aceitável, mas vamos fazer aqui considerando a configuração em azul, que é mais consistente com a realidade.

Neste caso, as condições de contorno são $u(0) = 0$ e $u(l) = u_{\max}$. Com a primeira condição, obtemos $c = 0$, e com a segunda, $al^2 + bl = u_{\max}$. Claramente temos duas incógnitas e uma única equação, mas podemos eliminar b considerando o fato da derivada ser nula na extremidade. Como $du/dx = 2ax + b$, $du/dx(l) = 2al + b = 0$, portanto, $b = -2al$.

Introduzindo b na expressão anterior para o deslocamento na extremidade, ficamos com $al^2 - 2al^2 = u_{\max}$, portanto $a = -u_{\max}/l^2$. Colocando a e b na expressão para o deslocamento, ficamos com

$$u(x) = -\frac{u_{\max}}{l^2}x^2 + 2\frac{u_{\max}}{l}x = \frac{u_{\max}}{l^2}\left(2xl - x^2\right).$$

Podemos verificar rapidamente que $u(0) = 0$ e $u(l) = u_{\max}$.

Como queremos calcular a frequência natural, e o sistema parece ser mais ou menos complicado, e foi mencionada energira potencial no enunciado da questão, suspeitamos que este seja um problema no qual é conveniente aplicarmos o método re Rayleigh, no qual determinamo sa frequência natural como a frequência na qual a energia cinética máxima é igual à energia potencial do sistema.

Precisamos calcular então as energias cinética e potencial do sistema, considerando que a massa na extremidade tenha movimento harmônico, e que todos os pontos da barra também tenham movimento harmônico. Em primeiro lugar vamos calcular a energia potencial, que está, obviamente, toda armazenada na deformação elástica da barra. É dito no enunciado que a energia de deformação é dada por

$$U = \frac{A}{2}\int_0^l \sigma\epsilon \, dx,$$

onde ϵ é a deformação específica du/dx e σ é a tensão axial dada por $E\epsilon$. No caso,

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{2u_{\max}}{l^2}(l-x),$$

que varia linearmente do valor máximo $2u_{\max}/l$ em 0 até 0 em l. A energia potencial pode ser escrita como

$$U = \frac{AE}{2}\int_0^l \epsilon^2 \, dx,$$

ou, desenvolvendo,

$$U = \frac{AE}{2}\int_0^l \left[\frac{2u_{\max}}{l^2}(l-x)\right]^2 dx,$$

$$U = \frac{2AEu_{\max}^2}{l^4}\int_0^l (l-x)^2 \, dx,$$

$$U = \frac{2AEu_{\max}^2}{l^4}\int_0^l l^2 - 2lx + x^2 \, dx,$$

$$U = \frac{2AEu_{\max}^2}{l^4}\left[l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{2AEu_{\max}^2}{l^4}\left[l^3 - l^3 + \frac{l^3}{3}\right] = \frac{2}{3}\frac{AEu_{\max}^2}{l}.$$

Para calcular a energica cinética do sistema, vamos considerar que a massa na extremidade da barra se move com movimento harmônico, $u(t) = u_{\max}\sin\omega t$. A energia cinética total do sistema será a energia cinética da massa concentrada na extremidade, mais a energia cinética armazenada na própria barra.

Supondo que a massa na extremidade seja M, e sabendo que a sua velocidade é $\dot{u}(t) = \omega u_{\max}\cos\omega t$, vemos que a energia máxima é

$$T_M = \frac{1}{2}M\omega^2 u_{\max}^2.$$

Para calcular a energia cinética da barra (isto equivale a calcular a massa equivalente) vamos considerar que todos os pontos se movem com a mesma frequência e em fase que a extremidade, isto é,

$$u(x,t) = \frac{u_{\max}}{l^2}\left(2xl - x^2\right)\sin\omega t.$$

A velocidade em cada ponto é

$$\dot{u}(x,t) = \omega\frac{u_{\max}}{l^2}\left(2xl - x^2\right)\cos\omega t$$

e a velocidade máxima em cada ponto é

$$\dot{u}(x)_m = \omega\frac{u_{\max}}{l^2}\left(2xl - x^2\right).$$

A energia cinética de um elemento infinitesimal de barra é

$$dT_b = \frac{1}{2}\dot{u}(x)_m^2\, dm,$$

com o $dm = \rho\, dx$, onde $\rho = m_b/l$, sendo m_b a massa total da barra. Assim,

$$dT_b = \frac{1}{2}\dot{u}(x)_m^2\,\frac{m_b}{l}\,dx,$$

A energia cinética total da barra é

$$T_b = \int_0^l dT_b = \int_0^L \frac{1}{2}\dot{u}(x)_m^2\,\frac{m_b}{l}\,dx,$$

isto é,

$$T_b = \int_0^l dT_b = \int_0^L \frac{1}{2}\left[\omega\frac{u_{\max}}{l^2}\left(2xl - x^2\right)\right]^2\frac{m_b}{l}\,dx,$$

e desenvolvendo, obtemos,

$$T_b = \frac{1}{2}\omega^2\frac{u_{\max}^2}{l^4}\frac{m_b}{l}\int_0^L \left(2xl - x^2\right)^2 dx,$$

$$T_b = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 m_b u_{\max}^2}{l^5}\int_0^L \left(2xl - x^2\right)^2 dx,$$

$$T_b = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 m_b u_{\max}^2}{l^5}\int_0^L 4x^2l^2 - 4x^3l + x^4\,dx,$$

$$T_b = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 m_b u_{\max}^2}{l^5}\left[\frac{4x^3l^2}{3} - x^4l + \frac{x^5}{5}\right]_0^l = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 m_b u_{\max}^2}{l^5}\left[\frac{4l^5}{3} - l^5 + \frac{l^5}{5}\right] = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 m_b u_{\max}^2}{l^5}\frac{8l^5}{15},$$

$$T_b = \frac{1}{2}\frac{8}{15}m_b\omega^2 u_{\max}^2.$$

Podemos ver que a massa equivalente da barra, *para o deslocamento considerado* é 8/15, ou praticamente metade, da massa total da barra.

A energia cinética total do sistema é então $T = T_b + T_M$, ou

$$T = \frac{1}{2}\frac{8}{15}m_b\omega^2u_{\max}^2 + \frac{1}{2}M\omega^2u_{\max}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{8}{15}m_b + M\right]\omega^2u_{\max}^2 = \frac{1}{2}m_{\text{eq}}\omega^2u_{\max}^2,$$

onde definimos

$$m_{\text{eq}} = \frac{8}{15}m_b + M$$

para encurtar a expressão.

Igualando as energias cinética e potencial,

$$\frac{1}{2}m_{\text{eq}}\omega^2u_{\max}^2 = \frac{2}{3}\frac{AEu_{\max}^2}{l},$$

de onde tiramos

$$\omega^2 = \omega_n^2 = \frac{4}{3}\frac{AE}{m_{\text{eq}}l}.$$

$$\omega_n = \left(\frac{4}{3}\frac{AE}{m_{\text{eq}}l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

É curioso notar aqui que EA/l é a rigidez de uma barra em tração, então terminamos, como sempre, com uma forma de $\sqrt{k/m}$.

Podemos então calcular o valor numérico.

In [4]:
```
M = 0.30
d = 0.010
l = 0.5
A = N(pi)*d^2/4.0
V = A*l
rho = 7700
mb = rho*V
show((mb, V, A))
```

$$(0.302378292908018, 0.0000392699081698724, 0.0000785398163397448)$$

In [5]:
```
Meq = 8.0*mb/15.0 + M
show(Meq)
```

$$0.461268422884276$$

In [6]:
```
E = 210.0e9
wn = sqrt((4.0*A*E)/(3*Meq*l))
show(wn)
```

$$9764.77164824208$$

In [7]:
```
f = wn/(2.0*pi)
show(N(f))
```

1554.11167598132

A frequência natural do sistema é então mais ou menos 1550 Hertz.

Questão 3

Em primeiro lugar vamos calcular a energia potencial total da massa, pois esta é a energia que irá ser absorvida pela deformação elástica da mola na base do elevador. A massa total é igual a 100 kg, e cai de uma altura de 10m, portanto

In [8]:
```
m = 100
h = 10
g = 9.8
U = m*g*h
show(U)
```

9800.00000000000

É dito no enunciado que podemos ignorar o amortecimento durante oa primeira compressão, portanto, a energia total armazenada na mola é igual à energia potencial do sistema.

Temos então

$$\frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2 = U, \quad k = \frac{2U}{x_{\text{max}}^2}$$

In [9]:
```
xmax = 0.50
k = 2*U/0.50**2
show(k)
```

78400.0000000000

Como estamos desconsiderando qualquer outra massa associada ao sistema de freios, a frequência natural do sistema pode ser calculada diretamente por

In [10]:
```
wn = sqrt(k/m)
show(wn)
```

28.0000000000000

Lembramos que, para a vibração livre amortecida por atrito seco, ou atrito de Coulomb, a frequência de vibração é a mesma que a frequência natural, assim, podemos calcular o período de vibração livre amortecida diretamente

In [11]:
```
tau = 2*N(pi)/wn
show(tau)
```

0.224399475256414

Como queremos que a vibração cesse em 2 segundos no máximo, teremos como o máximo número de ciclos

In [12]:
```
nc = 2/tau
show(nc)
```

8.91267681314614

Como queremos no máximo 2 segundos, vamos arredondar para baixo, limitando a 8 ciclos.

No formulário temos o número de semiciclos até a parada, dado por

$$r \geq \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}}.$$

Vamos reescrever para explicitar a força normal, que é a forca de acionamento do freio.

$$r\frac{2\mu N}{k} \geq x_0 - \frac{\mu N}{k},$$

$$r\frac{2\mu N}{k} + \frac{\mu N}{k} \geq x_0,$$

$$N\left(\frac{2\mu r}{k} + \frac{\mu}{k}\right) \geq x_0,$$

$$N\frac{\mu}{k}(2r+1) \geq x_0,$$

$$N \geq \frac{kx_0}{\mu(2r+1)}.$$

É importante perceber que o deslocamento inicial x_0 é o deslocamento máximo admitido no sistema de frenagem.

In [13]:
```
mu = 0.85
nc = 9
r = 2*nc
N = (k*xmax)/(mu*(2*r+1))
show(N)
```

1246.42289348172

A força normal deve então ser maior de 1246.4 N, vamos arredondar para 1250 N, sem grandes preocupações com fatores de segurança e outras coisas que devem ser consideradas no mundo real.