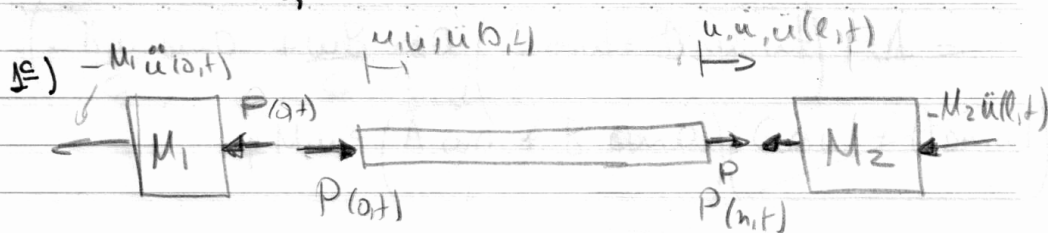


4º EE VIBRAÇÕES

28/07/2018 (1)



$$u(x,t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

$$C(\Rightarrow) \sum F_x = 0 \text{ p/ } M_1 \text{ e } M_2$$

$$-M_1 \ddot{u}(0,t) - P(0,t) = 0 \quad , \quad -M_2 \ddot{u}(l,t) - P(l,t) = 0$$

$$P(x,t) = AE \frac{\partial u}{\partial x} ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(-\frac{A \omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c} + \frac{B \omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

Logo equando em

$$EA \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -M_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t)$$

$$P(0,t) = -M_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t)$$

(2)

$$\left(-\frac{\tilde{A}w}{c} \sin 0 + \frac{wB}{c} \cos 0 \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t) EA =$$

$$+ M_1 \omega^2 (\tilde{A} \cos 0 + B \sin 0) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

$$EA \frac{wB}{c} = M_1 \omega^2 \tilde{A} \Rightarrow \boxed{\tilde{A} = \frac{EAB}{M_1 c \omega}} (*)$$

Lado Direito: $EA \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = + M_2 \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l, t)$

$$\left(-\frac{\tilde{A}w}{c} \sin \omega l + \frac{Bw}{c} \cos \omega l \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t) EA =$$

$$= -M_2 \omega^2 \left(\tilde{A} \cos \omega l + B \sin \omega l \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

$$-\frac{\tilde{A}}{c} \sin \omega l + \frac{B}{c} \cos \omega l = -M_2 \omega \left(\tilde{A} \cos \omega l + B \sin \omega l \right)$$

(*) $\Rightarrow$

$$-\frac{EAB}{M_1 c \omega} \sin \omega l + \frac{B}{c} \cos \omega l = -\frac{M_2 \omega EAB}{M_1 c \omega} \cos \omega l +$$

$$- M_2 \omega B \sin \omega l$$

$$\frac{\sin \omega l}{c} \left(\frac{M_2 \omega EA}{M_1 c^2 \omega} \right) = -\frac{\cos \omega l}{c} \left(\frac{1}{c} + \frac{M_2 EA}{M_1 c} \right)$$

$$\frac{\sin \omega l}{c} \left(\frac{M_1 M_2 c^2 \omega^2 + EA}{M_1 c^2 \omega} \right) = -\frac{\cos \omega l}{c} \left(\frac{M_1 c + M_2 c EA}{M_1 c^2} \right)$$

$$\boxed{\frac{\sin \omega l}{c} = -\frac{(M_1 c + M_2 c EA) \omega}{M_1 M_2 c^2 \omega^2 + EA}}$$

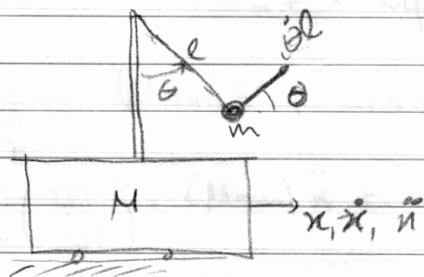
ou alguma
nomenclatura
curta!

7

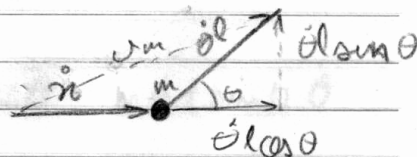
Questão 2: Admitindo que o sistema se pode deslocar no plano no eixo horizontal, o sistema obviamente tem 2 graus de liberdade, a posição horizontal do carro e o ângulo do pêndulo, por exemplo.

No entanto, como podemos deslocar o carro (vagareosamente) sem causar deslocamento do pêndulo, o sistema tem momentos de corpo rígido, é portanto um sistema semi-definido e tem 2 frequências naturais, sendo uma delas nula.

Normalmente, este tipo de problema é mais facilmente resolvido com algum método baseado em energia, como por exemplo os quocientes de Lagrange.



Examinando a massa "m", temos



A velocidade absoluta da massa "m" é

$$v_m^2 = (\dot{x} + \dot{\theta} l \cos \theta)^2 + (\dot{\theta} l \sin \theta)^2$$

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta + \dot{\theta}^2 l^2 \cos^2\theta + \dot{\theta}^2 l^2 \sin^2\theta$$

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta$$

A energia cinética da massa m é intos:

$$T_m = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos\theta)$$

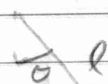
Para massa $M \rightarrow T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$

A energia cinética total é:

$$T = \frac{1}{2} (M\dot{x}^2 + m\dot{x}^2 + m(\dot{\theta}^2 l^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos\theta))$$

$$T = \frac{1}{2} [(M+m)\dot{x}^2 + m(\dot{\theta}^2 l^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos\theta)]$$

A energia potencial é devido somente à altura da massa m



$$U = mgl(1 - \cos\theta)$$

$l - l \cos\theta$

m

As equações E-L são:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + 2m\dot{\theta}l \cos\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= (M+m)\ddot{x} + m\ddot{\theta}l \cos\theta + m\dot{\theta}l \sin\theta \dot{\theta} \\ &= (M+m)\ddot{x} + m\ddot{\theta}l \cos\theta + ml \sin\theta \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta}l^2 + \dot{x}l \cos\theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta} + \ddot{x}l \cos\theta + m\dot{x}l \sin\theta \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgl \sin \theta$$

Assim: $(M+m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + 0 = 0$
 ~~$ml \cos \theta \ddot{x} + ml \ddot{\theta} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + mgl \sin \theta = 0$~~

Tanto consideramos apenas pequenas rotações, de forma que $\cos \theta \rightarrow 1$, $\sin \theta \rightarrow \theta$,

e os termos $\sin \theta \dot{\theta}^2$ e $\sin \theta \dot{\theta}$ são desprezíveis

Assim:
$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -(l\ddot{\theta} + g\theta),$$

$$-(M+m)(l\ddot{\theta} + g\theta) + ml\ddot{\theta} = 0$$

$$-(M+m)l\ddot{\theta} - (M+m)g\theta + ml\ddot{\theta} = 0$$

$$-Ml\ddot{\theta} - \cancel{ml\ddot{\theta}} - (M+m)g\theta + \cancel{ml\ddot{\theta}} = 0$$

$$Ml\ddot{\theta} + (m+M)g\theta = 0$$

Obviamente, $\omega_n = \sqrt{\frac{(m+M)g}{Ml}} = \sqrt{\frac{(1+m/M)g}{l}}$

O ângulo θ é... $\theta(0) = A$ desmont + Sem mont $\left\{ \begin{array}{l} \text{ISTO É} \\ \text{DESNE-} \\ \text{CESSÁRIO} \\ \text{NA PROVA!} \end{array} \right.$
 Com A e B - (deter. nuncas a partir das condições iniciais.)

O deslocamento $x(t)$ é dado então por:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = +\omega^2 l (A \cos \omega t + B \sin \omega t) - g(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = A[\omega^2 l - g] \cos \omega t + B[\omega^2 l - g] \sin \omega t$$

$$A \cos \omega t; \quad x(t) = \frac{A(\omega^2 l - g)}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{B(\omega^2 l - g)}{\omega^2} \sin \omega t$$



6

Questão 3: Para uma barra fixa-livre, da tabela dada no formulário, sabemos que os modos normais têm a forma:

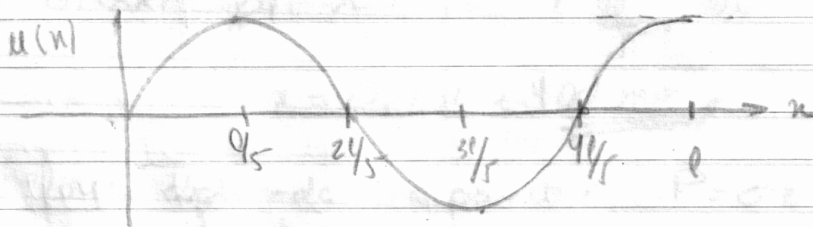
$$u_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1) \pi x}{2l}$$

para o terceiro modo, $n=2$, assim

$$u_3(x) = C_3 \sin \frac{5 \pi x}{2l}$$

Fazendo um esquema deste modo, temos:

x	0	$l/5$	$2l/5$	$3l/5$	$4l/5$	l
$\sin \frac{5 \pi x}{2l}$	0	1	0	-1	0	1



A tensão em uma seção transversal é dada por

$$\sigma = E \epsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

$$u_3(x, t) = U(x) T(t) \text{ função harmônica}$$

Como é dado no enunciado, a amplitude de vibração é 0,15 mm,



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

Avenida da Arquitetura, s/n - Cidade Universitária - Recife - PE 50740-550

7

Assim: $U(x) = 0,15 \times 10^{-3} \sin 5\pi x$

$$U(x) = 0,15 \times 10^{-3} \sin 5\pi x$$

FORMULÁRIO

TRANCAMENTO - PRORROGAÇÃO

Nome: Ana Maria	$\frac{dU(x)}{dx} = 5\pi \times 0,15 \times 10^{-3} \cos 5\pi x$
Nível: ☒ Mestre	E-mail: anamaria.aquino2@gmail.com
Área de Concentração: $\frac{dU}{dx} = 0,75 \times \pi \times 10^{-3} \cos 5\pi x$	
☐ Tecnologia Ambiental	☐ Geotecn
☐ Recursos Hídricos	☐ Estruturas
☒ Poluição	☐ Transporte
	Telefone Celular: 67 98272-1503

SOLICITAÇÃO A tensão é $\sigma = E \frac{dU}{dx} = 210 \times 10^9 \times 0,75 \times \pi \times 10^{-3} \cos 5\pi x$

D. Trancamento de matrícula	Período: maio de 2018
E. Prorrogação de prazo para defesa	Período: maio de 2018

JUSTIFICATIVA DO ALUNO

Devido a circunstâncias externas (leve dos combustíveis nos postos de gasolina) e o fato de o meu prazo de defesa estar vencido, não foi possível comparecer ao trabalho de defesa. Considerando a suspensão das aulas e do expediente administrativo da UFPE nos dias 24, 25 e 26/05/2018 e visto que não há previsão de regularização das circunstâncias externas até o meu prazo de defesa, solicito a prorrogação do meu prazo de defesa, a fim de que eu possa comparecer após a regularização das atividades da UFPE. Obrigada.

A força aplicada no parafuso é: $P = \sigma \cdot A$

$$P = 494 \times \pi \times \frac{(0,010)^2}{4} = 38,5 \text{ kN}$$

APRESENTAÇÃO DO ORIENTADOR

Assinatura do orientador	

Data: 27 de maio de 2018

Assinatura do orientador