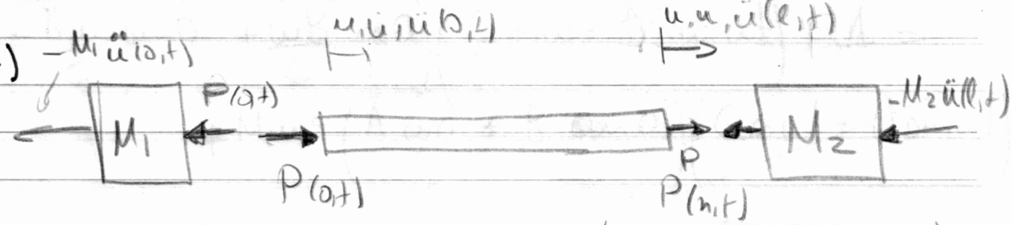
1º)



$$u(x,t) = \left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c}\right)\left(C\cos\omega t + D\sin\omega t\right)$$

CC $\Leftrightarrow$ $\sum F_x = 0$ p/ M_1 e M_2

$$-M_1\ddot{u}(0,t) - P(0,t) = 0 \quad e \quad -M_2\ddot{u}(0,t) - P(l,t) = 0$$

$$P(x,t) = AE\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(-\frac{A\omega}{c}\sin\frac{\omega x}{c} + \frac{\omega B}{c}\cos\frac{\omega x}{c}\right)\cdot\left(C\cos\omega t + D\sin\omega t\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2\left(A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c}\right)\left(C\cos\omega t + D\sin\omega t\right)$$

Lado esquerdo.

$$EA\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -M_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t)$$

$$\left(-\frac{\tilde{A}\omega}{c}\sin 0 + \frac{\omega B}{c}\cos 0\right)\left(C\cos\omega t + \cancel{D\sin\omega t}\right)EA =$$

$$+M_1\omega^2\left(\tilde{A}\cos 0 + B\sin 0\right)\left(C\cos\omega t + \cancel{D\sin\omega t}\right)$$

$$\frac{EA\cancel{\omega}B}{c} = M_1\omega^{\cancel{2}}\tilde{A} \Rightarrow \boxed{\tilde{A} = \frac{EAB}{M_1 c\omega}} \quad (*)$$

Lado Direito: $EA\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = +M_2\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t)$

$$\left(-\frac{\tilde{A}\omega}{c}\sin\frac{\omega l}{c} + \frac{B\omega}{c}\cos\frac{\omega l}{c}\right)\left(C\cos\omega t + \cancel{D\sin\omega t}\right)EA =$$

$$= -M_2\omega^2\left(\tilde{A}\cos\frac{\omega l}{c} + B\sin\frac{\omega l}{c}\right)\left(C\cos\omega t + \cancel{D\sin\omega t}\right)$$

$$-\frac{\tilde{A}}{c}\sin\frac{\omega l}{c} + \frac{B}{c}\cos\frac{\omega l}{c} = -M_2\omega\left(\tilde{A}\cos\frac{\omega l}{c} + B\sin\frac{\omega l}{c}\right)$$

$(*) \Rightarrow$

$$-\frac{EA\cancel{B}}{M_1 c^2\omega}\sin\frac{\omega l}{c} + \frac{\cancel{B}}{c}\cos\frac{\omega l}{c} = -\frac{M_2\cancel{\omega}EA\cancel{B}}{M_1 c\cancel{\omega}}\cos\frac{\omega l}{c} + $$
$$-M_2\omega\cancel{B}\sin\frac{\omega l}{c}$$

$$\sin\frac{\omega l}{c}\left(M_2\omega + \frac{EA}{M_1c^2\omega}\right) = -\cos\frac{\omega l}{c}\left(\frac{1}{c} + \frac{M_2EA}{M_1c}\right)$$

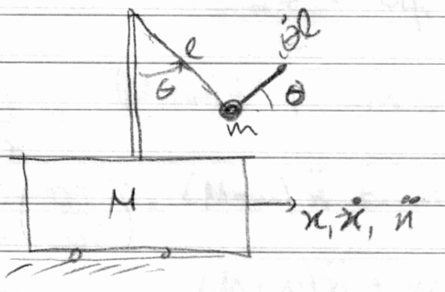
$$\sin\frac{\omega l}{c}\left(\frac{M_1M_2c^2\omega^2 + EA}{\cancel{M_1}c^2\omega}\right) = -\cos\frac{\omega l}{c}\left(\frac{M_1c + M_2cEA}{\cancel{M_1}\cancel{c^2}}\right)$$

$$\boxed{\tan\frac{\omega l}{c} = -\frac{(M_1 c + M_2 c\,EA)\,\omega}{M_1M_2c^2\omega^2 + EA}}$$ ou alguma rearrumação disto!

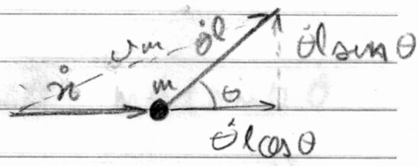
Questão 2: Admitindo que o sistema só pode deslocar-se no plano na direção horizontal, o sistema obviamente tem 2 graus de liberdade, a posição horizontal do carro e o ângulo do pêndulo, por exemplo.

No entanto, como podemos deslocar o carro (vagarosamente) sem causar deslocamento do pêndulo, o sistema tem movimento de corpo rígido, é portanto um sistema semi-definido e tem 2 frequências naturais, sendo uma delas nula.

Normalmente, este tipo de problema é mais facilmente resolvido com algum método baseado em energia, como por exemplo as equações de Lagrange.



Examinando a massa "m", temos



A velocidade absoluta da massa "m" é

$$v_m^2 = (\dot{x} + \dot{\theta} l \cos\theta)^2 + (\dot{\theta} l \sin\theta)^2$$

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} l \cos\theta + \dot{\theta}^2 l^2 \cos^2\theta + \dot{\theta}^2 l^2 \sin^2\theta$$

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} l \cos\theta$$

A energia cinética da massa "m" é então:

$$T_m = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} l \cos\theta \right)$$

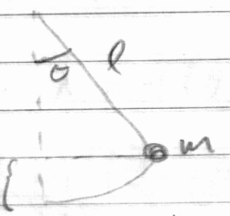
P/a massa "M" → $T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$

A energia cinética total é:

$$T = \frac{1}{2}\left(M\dot{x}^2 + m\dot{x}^2 + m\left(\dot{\theta}^2 l^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} l \cos\theta\right)\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\left[(M+m)\dot{x}^2 + m\left(\dot{\theta}^2 l^2 + 2\dot{x}\dot{\theta} l \cos\theta\right)\right]$$

A energia potencial é devida somente à elevação da massa "m"



$l - l\cos\theta$

$$U = mgl(1-\cos\theta)$$

As equações de E-L são:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\dot{\theta} l \cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{\theta} l \cos\theta + m\dot{\theta} l \sin\theta\, \dot{\theta}$$

$$= (M+m)\ddot{x} + m\ddot{\theta} l \cos\theta + \underline{ml \sin\theta\, \dot{\theta}^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta} l^2 + \dot{x} l \cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + m\ddot{x} l \cos\theta + m\dot{x} l \sin\theta\, \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgl\sin\theta$$

Assim:
$$(M+m)\ddot{x} + ml\cos\theta\,\ddot{\theta} + ml\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + 0 = 0$$
$$\cancel{m}\cancel{l}\cos\theta\,\ddot{x} + \cancel{m}l^2\,\ddot{\theta} + ml\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + \cancel{m}gl\sin\theta = 0$$

Vamos considerar apenas pequenas rotações, de forma que
$$\cos\theta \to 1; \quad \sin\theta \to \theta,$$

e os termos $\sin\theta\,\dot{\theta}^2$ e $\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta}$ são desprezáveis

Assim
$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta = \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -(l\ddot{\theta} + g\theta),$$

$$-(M+m)(l\ddot{\theta} + g\theta) + ml\ddot{\theta} = 0$$
$$-(M+m)l\ddot{\theta} - (M+m)g\theta + ml\ddot{\theta} = 0$$
$$-Ml\ddot{\theta} - \cancel{ml\ddot{\theta}} - (M+m)g\theta + \cancel{ml\ddot{\theta}} = 0$$

$$Ml\ddot{\theta} + (m+M)g\theta = 0$$

Obviamente, $w_n = \sqrt{\frac{(m+M)g}{Ml}} = \sqrt{\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}}$

O ângulo θ é $\theta(t) = A\cos w_n t + B\sin w_n t$

com A e B determinados a partir das condições iniciais.

ISTO É DESNECESSÁRIO NA PROVA!!

___/___/___

O deslocamento $x(t)$ é dado então por

$$\ddot{\theta}(t) = -w_n^2 (A\cos w_n t + B\sin w_n t)$$

$$\ddot{x}(t) = +w_n^2 l (A\cos w_n t + B\sin w_n t) - g(A\cos w_n t + B\sin w_n t)$$

$$\ddot{x}(t) = A[w_n^2 l - g]\cos w_n t + B[w_n^2 l - g]\sin w_n t$$

Assim; $x(t) = \iint A(w_n^2 l - g)\cos w_n t + \iint B(w_n^2 l - g)\sin w_n t$

Questão 3: Para uma barra fixo-livre, da tabela dada no formulário, sabemos que os modos normais tem a forma:

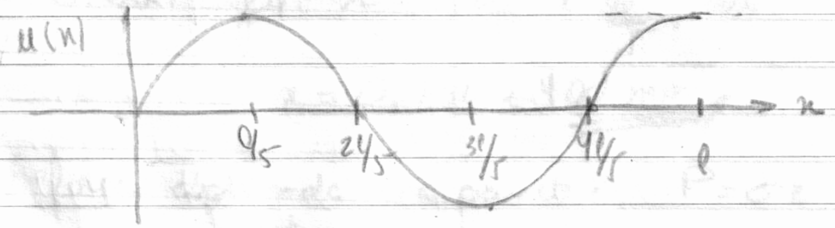
$$u_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)}{2} \frac{\pi x}{l}$$

para o terceiro modo, $n=2$, assim

$$u_2(x) = C_2 \sin \frac{5}{2} \frac{\pi x}{l}$$

Fazendo um esquema deste modo, temos:

x	0	$l/5$	$2l/5$	$3l/5$	$4l/5$	l
$\sin \frac{5}{2} \frac{\pi x}{l}$	0	1	0	−1	0	1



A tensão em uma seção transversal é dada por

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

$u_3(x,t) = U(x)\,T(t)$ → função harmônica

Como é dado no enunciado, a amplitude de vibração é 0,15 mm,

(7)

Assim $U(x) = 0{,}15\times10^{-3}\ \text{sin}\ \frac{5\pi x}{2\times0{,}5}$

$U(x) = 0{,}15\times10^{-3}\ \text{sin}\ 5\pi x$

$\frac{dU(x)}{dx} = 5\pi \times 0{,}15\times10^{-3}\ \cos 5\pi x$

$\frac{du}{dx} = 0{,}75\times\pi\times10^{-3}\ \cos 5\pi x$

A tensão é $\sigma = E\frac{du}{dx} = 210\times10^{9}\times0{,}75\pi\times10^{-3}\cos 5\pi x$

$\sigma = 494\ \cos 5\pi x\ \text{MPa}$

Obviamente, o valor máximo é 454 MPa e ocorre p/ $x = 0, \frac{2l}{5}$ e $\frac{4l}{5}$, ou

$x = 0, 200$ e 400 mm

A força aplicada na parede é: $P = \sigma . A$

$P = 494\times10^{6}\times\frac{\pi\times(0{,}010)^2}{4} = 38{,}5\ \text{kN}$