Questão 1

In [6]:
```
import math
```

Podemos escrever as equações de movimento para as massas fazendo o diagrama de corpo livre de cada uma delas, fazendo o somatório das forças na direção vertical. Temos então

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

e

$$m_2\ddot{x}_2 + -k_2x_1 + k_2x_2 = F(t).$$

Podemos colocar este sistema na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Como não há amortecimento, a matriz de impedância mecânica é real, e os deslocamentos estão em fase com as forças aplicadas. A matriz de impedância mecânica neste caso é apenas $\mathbf{Z}(i\omega) = \mathbf{k} - \omega^2\mathbf{m}$. Para este problema,

$$\mathbf{Z}(i\omega) = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix}$$

O inverso da matriz de impedância mecânica é

$$\mathbf{Z}(i\omega)^{-1} = \frac{1}{\text{detZ}}\begin{bmatrix} k_2 - m_2\omega^2 & k_2 \\ k_2 & (k_1 + k_2) - m_1\omega^2 \end{bmatrix}$$

onde detZ é o determinante da matriz de impedância mecânica, dado por

$$\text{detZ} = ((k_1 + k_2) - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2.$$

O determinante pode ser simplificado para

$$\text{detZ} = k_1k_2 - [m_1k_2 + (k_1 + k_2)m_2]\,\omega^2 + m_1m_2\omega^4.$$

Esta é a equação característica do problema e suas raízes são as frequências naturais do sistema. Podemos calculá-las agora, mas vamos usar valores numéricos para escrever menos.

Temos que $k_1 = 1000$, $k_2 = 1800$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, então

$$\text{detZ} = 1.8 \times 10^6 - 7400\omega^2 + 2\omega^4.$$

Esta é uma equação biquadrática de quem as raízes são os quadrados das frequências naturais.

Resolvendo,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{7400 \mp \sqrt{7400^2 - 4 \times 1.8 \times 10^6 \times 2}}{4},$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{7400 \mp \sqrt{54.76 \times 10^6 - 14.4 \times 10^6}}{4},$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{7400 \mp \sqrt{40.36 \times 10^6}}{4},$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{7400 \mp 6353}{4},$$

Os quadrados das frequências naturais são então $\omega_1^2 = 261.8$ e $\omega_2^2 = 3438$ e as frequências naturais são

$$\omega_1 = 16.12 \qquad \omega_2 = 58.64.$$

Estes valores estão em rad/s.

A resposta é dada por $\mathbf{X} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{F}$. Como

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix},$$

onde F_2 é a magnitude da força aplicada à massa 2. A resposta é

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\text{detZ}} \begin{bmatrix} k_2 - m_2\omega^2 & k_2 \\ k_2 & (k_1 + k_2) - m_1\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Realizando a multiplicação matricial, os deslocamentos das massas 1 e 2 sao

$$X_1 = \frac{1}{\text{detZ}} F_2 k_2$$

$$X_2 = \frac{1}{\text{detZ}} F_2 \left[(k_1 + k_2) - m_1\omega^2\right].$$

Para que este valor seja nulo, para qualquer valor de F_2, temos que

$$k_1 + k_2 - m_1\omega^2 = 0,$$

(exceto na ressonância onde $\text{detZ} = 0$ e este valor é indefinido). Assim,

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}},$$

onde, obviamente, só a resposta positiva faz sentido, então temos que a frequência para a qual o deslocamento da massa 2 e nulo é

In [14]:
```
k1 = 1000
k2 = 1800
m1 = 1
m2 = 2
w = math.sqrt((k1+k2)/m1)
print(w)
```

```
52.91502622129181
```

que é bem próximo da segunda frequência natural.

Para calcular o deslocamento da massa 1, precisamos do valor da equação característica nesta frequência.

In [15]:
```
detZ = 1.8e6 - 7400*w**2 - 2*w**4
print(detZ)
```

```
-34600000.0
```

O deslocamento é então,

In [16]:
```
F2 = 50

X1 = F2*k2/detZ
print(X1)
```

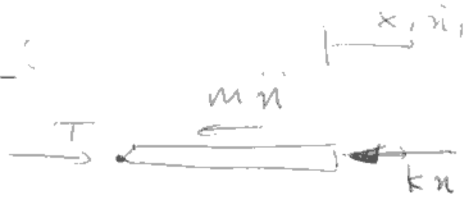
```
-0.002601156069364162
```

O deslocamento da massa 1 é igual a 2,6 milímetros, com frequência igual a 52,9 rad/s e em oposição de fase com a força aplicada.

Questão 2

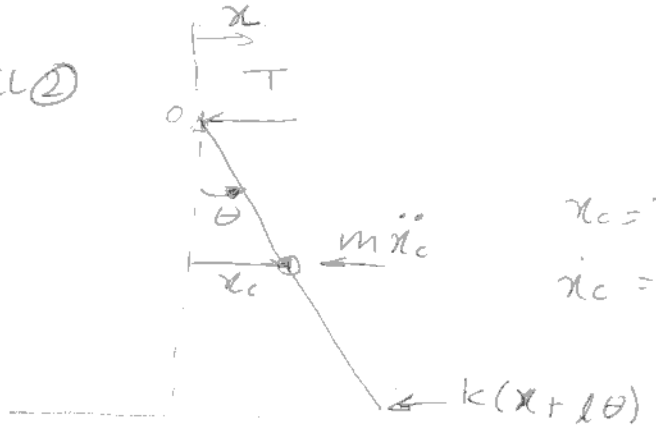
2ª Questão:

DCL ①



(não há movimento vertical então não é preciso considerar a componente vertical de força na interface)

DCL ②



$$x_c = x + \frac{l}{2}\theta$$

$$\dot{x}_c = \dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta}$$

① → $m\ddot{x} + kx - T = 0$

② → $T + m\ddot{x}_c + k(x + l\theta) = 0 \Rightarrow$

$$-T = m\ddot{x}_c + k(x + l\theta)$$

② em ① ⇒ $m\ddot{x} + kx + m\ddot{x}_c + k(x + l\theta) = 0$

$$m\ddot{x} + kx + m\left(\ddot{x} + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\right) + kx + kl\theta = 0$$

$$2m\ddot{x} + 2kx + \frac{ml}{2}\ddot{\theta} + kl\theta = 0$$

$$2m\ddot{x} + \frac{ml}{2}\ddot{\theta} + 2kx + kl\theta = 0$$

$\sum M_o = 0$ $\quad J_o\ddot{\theta} + m\frac{l}{2}\ddot{x}_c = -k(x + l\theta)l$

$$J_o\ddot{\theta} + m\frac{l}{2}\left(\ddot{x} + \frac{l}{2}\ddot{\theta}\right) + kx + kl\theta = 0$$

$$\left(J_o + \frac{ml^2}{4}\right)\ddot{\theta} + \frac{ml}{2}\ddot{x} + klx + kl^2\theta = 0$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2m & ml/2 \\ ml/2 & J_o + \frac{ml^2}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & kl \\ kl & kl^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$J_o = \frac{1}{3} m\ell^2 \qquad J_o + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{7m\ell^2}{12}$

Assim:

$$\begin{bmatrix} 2m & m\ell/2 \\ m\ell/2 & 7/12\, m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & k\ell \\ k\ell & k\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Supondo soluções harmônicas $x(t) = X\cos(\omega t + \phi)$; $\theta(t) = \Theta\cos(\omega t + \phi)$;

$$\begin{bmatrix} 2k - 2m\omega^2 & k\ell - \frac{m\ell}{2}\omega^2 \\ k\ell - \frac{m\ell\omega^2}{2} & k\ell^2 - \frac{7}{12} m\ell^2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A eq. característica é

$$(2k - 2m\omega^2)\left(k\ell^2 - \frac{7}{12} m\ell^2\omega^2\right) - \left(k\ell - \frac{m\ell\omega^2}{2}\right)^2 = 0$$

$$2k^2\ell^2 - \frac{7}{6} mk\ell^2\omega^2 - 2mk\ell^2\omega^2 + \frac{7}{6} m^2\ell^2\omega^4 - k^2\ell^2 + k\ell^2 m\omega^2 - \frac{m^2\ell^2\omega^4}{4} = 0$$

$$\left[\left(\frac{7}{6} - \frac{1}{4}\right) m^2\ell^2\right]\omega^4 - \left[\left(\frac{7}{6} + 2 - 1\right) km\ell^2\right]\omega^2 + k^2\ell^2 = 0$$

$$\frac{28-6}{24} m^2\ell^2\omega^4 - \frac{7+12-6}{6} km\ell^2\omega^2 + k^2\ell^2 = 0$$

$$\frac{11}{12} m^2\cancel{\ell^2}\omega^4 - \frac{13}{6} km\cancel{\ell^2}\omega^2 + k^2\cancel{\ell^2} = 0$$

$$\frac{11}{12} m^2\omega^4 - \frac{13}{6} km\omega^2 + k^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\frac{13}{6} km \pm \sqrt{\left(\frac{13}{6}\right)^2 k^2m^2 - 4k^2\frac{11}{12} m^2}}{\frac{22}{12} m^2} = \frac{\frac{13}{6} km \pm \sqrt{\left(\frac{169}{36} - \frac{44}{12}\right) k^2m^2}}{\frac{22}{12} m^2}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\frac{13}{6}km \pm \sqrt{\frac{111}{108} k^2m^2}}{\frac{22}{11} m^2} = \frac{\frac{13}{6}km \pm \sqrt{1k^2m^2}}{\frac{22}{11} m^2} = \frac{\frac{13}{6}k\cancel{m} \pm k\cancel{m}}{\frac{22}{11} m^{\cancel{2}}}$$

≈ 1

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{11}{22}\left(\frac{13}{6} \pm 1\right)\frac{k}{m} \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{11}{22}\left(\frac{19}{6}\right)\frac{k}{m} \; ; \; \omega_1^2 = \frac{11}{22}\frac{7}{6}\frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = 1{,}58\frac{k}{m} \; ; \; \omega_1^2 = 1{,}17\frac{k}{m}$$

Modos Normais Com a primeira equação e a segunda frequência

$$\left(2k - 2\cancel{m} \cdot 1{,}58\frac{k}{\cancel{m}}\right) X^{(2)} + \left(k\ell - \frac{\cancel{m}\ell}{2} 1{,}58\frac{k}{\cancel{m}}\right)\Theta^{(2)} = 0$$

$$-1{,}16\cancel{k} X^{(2)} + 0{,}21\cancel{k}\ell\,\Theta^{(2)} = 0 \Rightarrow \frac{\Theta^{(2)}}{X^{(2)}} = \frac{1{,}16}{0{,}21\ell} = \frac{5{,}52}{\ell}$$

Com a primeira equação e primeira frequência

$$\left(2k - 2\cancel{m} \cdot 1{,}17\frac{k}{\cancel{m}}\right) X^{(1)} + \left(k\ell - \frac{\cancel{m}\ell}{2} 1{,}17\frac{k}{\cancel{m}}\right)\Theta^{(1)} = 0$$

$$-0{,}34\cancel{k} X^{(1)} + 0{,}415\cancel{k}\ell\,\Theta^{(1)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Theta^{(1)}}{X^{(1)}} = \frac{0{,}34}{0{,}415\ell} = \frac{0{,}82}{\ell}$$

Eu não vou pôr a mão no fogo por este resultado, eu instintivamente esperava que um deles desse com o sinal trocado ???

Questão 3

Malandramente, alguém poderia responder "numericamente" para todos os problemas e estaria tecnicamente correto, mas eu estava esperando algo um pouco mais variado como:

a) Aplicando a análise de Fourier, e resolvendo analiticamente para cada frequência

b) Computacionalmente

c) transformando via Laplace ou, mais tipicamente, Integral de Carvalho

d) Computacionalmente, ou linearizando os intervalos e aplicando a integral de Duhamel p/ cada intervalo