Questão 1

Sabemos pelo enunciado que o sistema tem um grau de liberdade, e que tem amortecimento histerético. Vamos imaginar que o amortecimento seja muito baixo, pois é o único caso que sabemos tratar.

Sabemos que a amplitude decai a 80% de seu valor inicial após 100 ciclos de vibração. Com isto podemos cacular o decremento logarítimico, e ter uma medida concreta do amortecimento.

Do formulário,

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_n},$$

no caso,

In [3]:
```
import math

n = 101
x1 = 1.0
xn = 0.8
delta = 1/n *math.log(x1/xn)
print(delta)
```

```
0.002209342092219899
```

O valor de δ é agradavelmente pequeno. Se estivéssemos tratando apenas de amortecimento viscoso, ele poderia ser calculado rapidamente como $\zeta = \delta/2\pi$, assim

In [4]:
```
zeta = delta/(2*math.pi)
print(zeta)
```

```
0.000351627714957787
```

O que é obviamente muito muito pequeno, então podemos sem o menor problema tratar o amortecimento histerético com as hipóteses que fizemos que são válidas para valores pequenos.

É dado no enunciado que a deflexão estática do sistema é igual a 0,5 mm. É importante lembrar que para um sistema sob ação da gravidade, com um grau de liberdade, a deflexão estática é uma medida direta da frequência natural, já que $\delta_{\mathrm{st}} = mg/k$, de onde vem $k = mg/\delta_{\mathrm{st}}$ com $\omega_n = \sqrt{k/m}$, temos que $\omega_n = \sqrt{mg/\delta_{\mathrm{st}} m} = \sqrt{g/\delta_{\mathrm{st}}}$.

Assim, a frequência natural deste sistema é

In [7]:
```
g = 9.8
d_st = 0.0005
wn=math.sqrt(g/d_st)
fn = wn/(2*math.pi)
print(wn, fn)
```

```
140.0 22.281692032865347
```

A frequência natural é de 140 rad/s ou de aproximadamente 22,3 Hz.

Como imaginamos que o amortecimento seja constante, a amplitude após 1000 ciclos pode ser calculada facilmente com a fórmula do decremento logarítimico, que leva a $x_n = x_1/e^{n\delta}$, assim

In [8]:
```
x1 = 4
n = 1001
xn = x1/math.exp(n*delta)
print(xn)
```

```
0.43812234847598547
```

Para o amortecimento histerético, sabemos que $\delta = \pi\beta$, portanto

In [9]:
```
beta = delta/math.pi; print(beta)
```

```
0.000703255429915574
```

E ainda que $h = \beta k$. A massa é igual a 0,5 kg, e a rigidez pode ser calculada ou pela deformação estática ou pela frequência natural. Usando a primeira alternativa, $k = F_0/\delta_{\mathrm{st}} = mg/\delta_{\mathrm{st}}$, portanto

In [12]:
```
m = 0.5
F0 = m*g
k = F0/d_st
print(k)
h = beta*k
print(h)
```

```
9800.0
6.891903213172625
```

A energia dissipada por ciclo, para baixos valores de amortecimento, pode ser aproximada por $\Delta W = \pi h X^2$, onde, no caso $X = x_n$, assim

In [14]:
```
DW = math.pi*h*xn**2; print(DW)
```

```
4.156041316815265
```

Portanto neste ciclo o sistema dissipa aproximadamente 4.15 Joules por ciclo.

Questão 2

Claramente o problema de vibrações em vigas é um problema contínuo, mas como ainda estamos no capítulo de sistemas com 1 grau de liberdade, é óbvio que devemos aproximar o problema com um modelo de um grau de liberdade.

Teremos que encontrar, portanto, a massa equivalente e a rigidez equilaventes, considerando a coordenada generalizada que escolhamos para descrever o sistema. A coordenada generalizada gritantemente óbvia para este problema é o deslocamento do centro da viga, então teremos que encontrar as grandezas equivalentes em relação a ela.

Para encontrar a rigidez equivalente, o "certo" seria calcular a energia de deformação elástica, devida ao alongamento e encurtamento das fibras ao longo da seção transversal, e integrar esta energia ao longo do comprimento da viga. Infelizmente (ou felizmente) não temos informações suficientes no enunciado para fazermos isto, então vamos fazer a próxima coisa possível que é simplesmente a consideração de que há uma força concentrada no centro da viga, cuja flecha correspondente é dada pela fórmula da prova. Vamos usar a fórmula dada com $x = a = b = l/2$, o que leva a

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

A rigidez equivalente pode ser tomada como a razão entre a força aplicada e o deslocamento resultante, ou, $k = P/y_{l/2}$, assim

$$K = \frac{48EI}{l^3}.$$

No caso temos

In [16]:
```
l = 1.0
E=210e9
b=0.010
h=0.015
I=b*h**3/12.0; print(I)

k = 48*E*I/l**3; print(k)
```

```
2.8124999999999995e-09
28349.999999999996
```

Precisamos calcular a massa equivalente. Obviamente concentrar toda a massa no centro da viga é uma aproximação muito ruim, pois as massas próximas às extremidades das vigas contribuem muito pouco para a energia cinética total da viga durante a vibração. É mais sensato, apesar de ainda aproximado, considerar que a forma da viga durante a vibração é a mesma que ela tem durante o carregamento estático, que pode ser obtida colocando $a = b = l/2$ na primeira fórmula para a deflexão, o que leva a uma fórmula para o deslocamento em função de x que vale para a primeira metade da viga. Como a deformação é simétrica para uma carga central, podemos calcular a energia cinética para esta metade da viga e multiplicar o resultado por 2. A fórmula para o deslocamento é

$$y(x) = \frac{P}{48EI}\left(3l^2x - 4x^3\right).$$

Chamando o deslocamento do ponto central de y_m, temos que

$$y_m = \frac{Pl^3}{48EI},$$

portanto

$$\frac{P}{48EI} = \frac{y_m}{l^3},$$

E a fórmula acima pode ser reescrita para

$$y(x) = \frac{y_m}{l^3}(3l^2x - 4x^3).$$

Vamos supor que todos os pontos da viga tem movimento harmônico e em fase, portanto

$$y(x,t) = \frac{y_m}{l^3}(3l^2x - 4x^3)\cos(\omega t - \phi).$$

A velocidade de cada ponto da viga é dada por

$$\dot{y}(x,t) = -\omega\frac{y_m}{l^3}(3l^2x - 4x^3)\sin(\omega t - \phi),$$

e a velocidade máxima dos pontos ao longo da viga é, claramente,

$$\dot{y}_m(x) = -\omega\frac{y_m}{l^3}(3l^2x - 4x^3).$$

Vamos calcular a energia cinética equivalente integrando a energia cinética de elementos infinitesimais de comprimento dx de 0 a $l/2$, e multiplicando por 2.

Para um elemento em uma posição x, a energia cinética máxima é

$$dT = \frac{1}{2}dm\dot{y}_m^2,$$

onde $dm = \rho A dx$, com ρ sendo a massa específica e A a área da seção transversal. Assim,

$$dT = \frac{1}{2}\rho A\dot{y}_m^2 dx,$$

A energica cinética total máxima é então

$$T = 2\int_0^{l/2}\frac{1}{2}\rho A\dot{y}_m^2 dx = \rho A\int_0^{l/2}\dot{y}_m^2 dx,$$

onde a velocidade máxima em cada ponto foi calculada acima. Colcando este valor na expressão,

$$T = \rho A\int_0^{l/2}(-\omega\frac{y_m}{l^3}(3l^2x - 4x^3))^2 dx,$$

ou

$$T = \frac{\rho A\omega^2 y_m^2}{l^6}\int_0^{l/2}(3l^2x - 4x^3)^2 dx,$$

ou ainda mais,

$$T = \frac{\rho A\omega^2 y_m^2}{l^6}\int_0^{l/2}9l^4x^2 - 24l^2x^4 + 16x^6 dx.$$

A integral é polinomial, que pode ser feita trivialmente, cujo resultado leva a

$$T = \frac{\rho A \omega^2 y_m^2}{l^6}\left[\frac{9l^4x^3}{3} - \frac{24l^2x^5}{5} + \frac{16x^7}{7}\right]_0^{l/2},$$

ou

$$T = \frac{\rho A \omega^2 y_m^2}{l^6}\left[\frac{3l^4l^3}{8} - \frac{24l^2l^5}{(32)(5)} + \frac{16l^7}{(128)(7)}\right] = \frac{\rho A \omega^2 y_m^2}{l^6}\left[\frac{3l^7}{8} - \frac{6l^7}{40} + \frac{l^7}{56}\right],$$

finalmente,

$$T = \frac{\rho A \omega^2 y_m^2}{l^6}\frac{17l^7}{70} = \frac{17}{70}\rho A \omega^2 y_m^2 l.$$

Como $\rho A l$ é a massa da barra, temos que

$$T = \frac{17}{70} m \omega^2 y_m^2.$$

Uma massa equivalente no centro da barra em vibração harmônica com amplitude y_m tem energia cinética igual a

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \omega^2 y_m^2.$$

Igualando as duas expressões, temos que a massa equivalente é então

$$m_{\text{eq}} = \frac{17}{35} m.$$

Como $17/35 \approx 0.5$, a massa equivalente é aproximadamente metade da massa da barra. No caso temos

In [18]:
```
rho=7800
A = b*h
print(A)
l = 1
m = rho*A*l
print(m)
meq=17.0/35.0*m
print(meq)
```

```
0.00015
1.17
0.5682857142857143
```

O problema agora é um simples problema de vibração forçada harmonicamente. A amplitude da força de excitação é 100N, e sua frequência é 30 Hz. A frequencia circular é

In [32]:
```
F0=100
f=30
w = 2*math.pi*f; print(w)
```

```
188.49555921538757
```

A frequência natural do sistema é dada por $\omega_n = \sqrt{k/m_{\text{eq}}}$,

In [24]:
```
wn = math.sqrt(k/meq); print(wn)
```
```
223.35370565104643
```

A razão de frequências é

In [25]:
```
r = w/wn; print(r)
```
```
0.8439329836321633
```

O amortecimento é dado diretamente no enunciado, e é igual a 0.5%,

In [26]:
```
zeta = 0.005
```

Podemos calcular a resposta com a fórmula dada para a resposta complexa em frequência,

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 - r^2 + 2\zeta r i}.$$

No caso, temos que

In [31]:
```
Hiw = 1.0/(1.0 - r**2 + complex(0.0, 2*zeta*r)); print(Hiw)
```
```
(3.47192553798123-0.10181742339338058j)
```

A deformação estática é

In [34]:
```
d_st = F0/k; print(d_st)
```
```
0.0035273368606701942
```

A resposta (complexa) é $X = H(iw)\delta_{\mathrm{st}}$,

In [35]:
```
X = d_st*Hiw; print(X)
```
```
(0.012246650927623387-0.00035914435059393506j)
```

A amplitude e a fase são

In [37]:
```
A, phi = cmath.polar(X)
print(A, phi)
```
```
0.012251915915791388 -0.029317521167376712
```

Questão 3

Este é obviamente um problema que envolve atrito de Coulomb. Uma das principais características de problemas com atrito de Coulomb é que frequência de vibração amortecida é a mesma que a frequência natural, o que não é caso para problemas com amortecimento viscoso. No caso, temos

In [38]:
```
k = 100
m = 0.25
wn = math.sqrt(k/m)
print(wn)
```

```
20.0
```

A frequência (Hz) natural e o período de vibração são então,

In [39]:
```
fn = wn/(2*math.pi)
Tn = 1.0/fn
print(Tn, fn)
```

```
0.3141592653589793 3.183098861837907
```

(O período natural me parece meio "redondo" demais para ser um número arbitrário :)

Se a vibração cessa após 60 segundos, o número de ciclos completos até a parada é

In [40]:
```
nc = 60/Tn; print(nc)
```

```
190.9859317102744
```

O número de semi-ciclos é obviamente o dobro disto,

In [43]:
```
ns = 2*nc; print (ns)
```

```
381.9718634205488
```

Sabemos que a cada ciclo, a amplitude de vibração descresce de $4\mu N/k$, devido à formula dada no enunciado. Este fator é desconhecido pois não sabemos o valor de μ.

Como o amortecimento parece ser baixo, vamos estimar admitir que posição final da massa é na origem, isto é, $X = 0$. Assim se a amplitude inicial é 100 mm, e ela se torna 0 em 191 ciclos, aproximadamente, a cada ciclo a amplitude cai de um valore δ_a igual a

In [47]:
```
da = 0.100/191; print(da)
```

```
0.0005235602094240838
```

O coeficiente de atrito pode ser calculado por $\mu = k\delta_a/4N$, e a força normal é $N = mg$, então

In [48]:
```
N = m*g
mu = k*da/(4*N)
print(mu)
```

```
0.005342451116572284
```

Este valor é realmente muito baixo, então nossas hipóteses são razoáveis.

Questão 4

Quando olhamos o diagrama de forças correspondente à vibração harmônica forçada, percebemos que a força de inércia e a força elástica são perpendiculares à força externa aplicada. Somente a força de atrito tem algum componente (de fato, toda ela) na direção da força externa aplicada, portanto é a única força que pode resistir a ela.

Na prova de vocês meio que eu espero que seja feita aquela figura mágina que eu gasto uma aula em cima.