Questão 1

A série de Fourier da função é dada como uma série de senos apenas. Desta fora, o espectro de frequências da função é dado diretamente pela amplitude dos senos, e não é necessário calcular fases.

As amplitudes dos senos são dadas por

$$b_n = -\frac{2A}{\pi n}(-1)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Lembramos que $(-1)^n$ é apenas para corrigir o sinal, sendo positivo para n par e negativo para n ímpar. Claramente na prática precisamos calcular apenas um número finito de termos. Na prova, por volta de cinco é suficiente, já que a fórmula é bem simples, aqui vou calcular mais termos pois estou fazendo tudo computacionalmente.

Obviamente, o espectro final será calculado em termos da amplitude A. Como tudo é linear, podemos simplesmente considerar $A = 1$ e multiplicar tudo por A no final. Vamos calcular os valores numéricos.

In [2]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

In [3]:
```
js = np.arange(1.0,11.0, 1.0); js
```

Out[3]:
```
array([ 1.,  2.,  3.,  4.,  5.,  6.,  7.,  8.,  9., 10.])
```

In [4]:
```
bn = -2.0/(np.pi*js)
print(bn)
idx = np.arange(0,10,2); # Even indices
bn[idx] *= -1
print(bn)
```

```
[-0.63661977 -0.31830989 -0.21220659 -0.15915494 -0.12732395 -0.10
61033
 -0.09094568 -0.07957747 -0.07073553 -0.06366198]
[ 0.63661977 -0.31830989  0.21220659 -0.15915494  0.12732395 -0.10
61033
  0.09094568 -0.07957747  0.07073553 -0.06366198]
```

Basta agora plotar os valores em gráfico, em termos da frequência fundamental

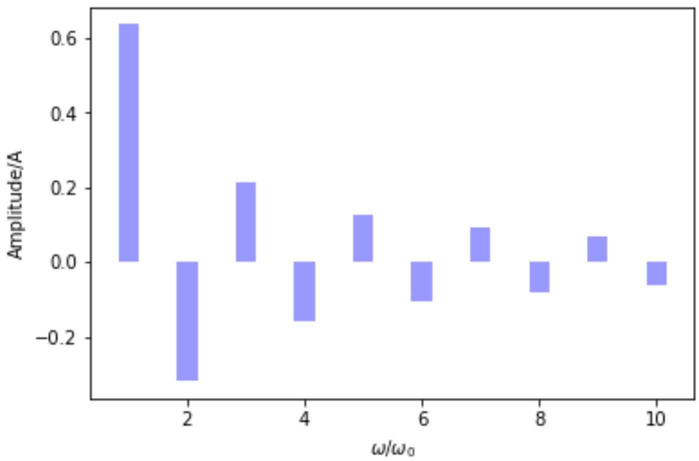
In [5]:
```
fig, ax = plt.subplots()

bar_width = 0.35

opacity = 0.4
index = np.arange(1,11)

rects1 = ax.bar(index, bn, bar_width,
                alpha=opacity, color='b')
ax.set_xlabel('$\omega/\omega_0$')
ax.set_ylabel('Amplitude/A')
```

Out[5]: `Text(0,0.5,'Amplitude/A')`



É interessante ver que, como a função é meio "difícil", as amplitudes não caem muito rapidamente.

Questão 2

Como os cilindros giram sem deslizar contra o piso e o bloco, o sistema tem um grau de liberdade. Vamos tomar como coordenada generalizada o deslocamento horizontal do bloco em relação à posição de equilíbrio do sistema, que tomaremos como o centro do bloco.

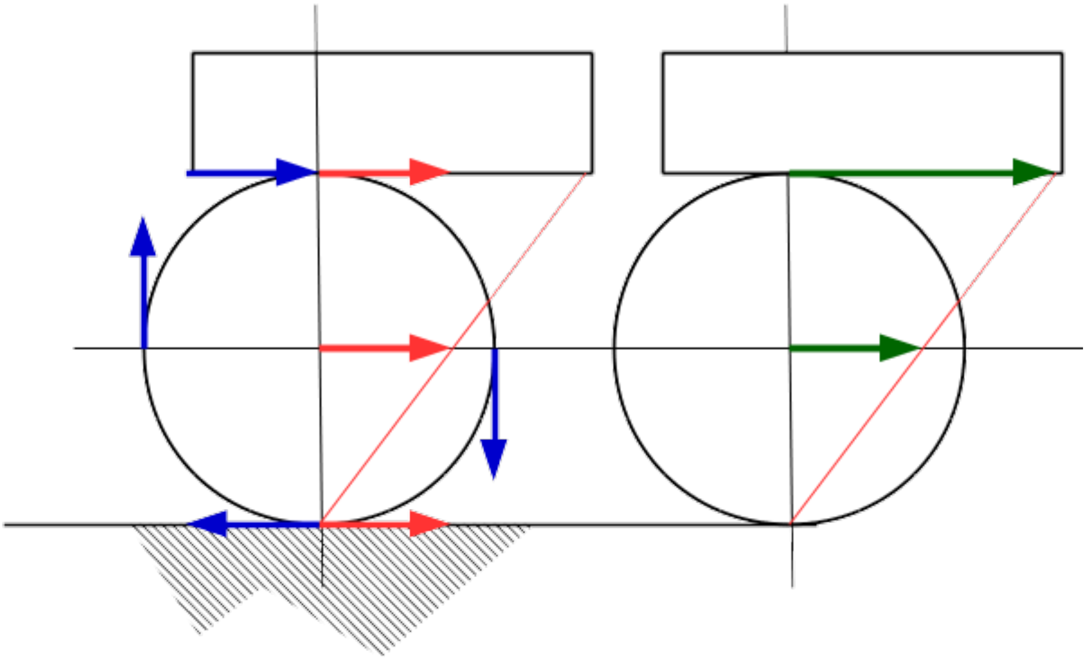
Para calcular o período natural precisamos da frequência natural. Vamos então calcular a massa e a rigidez equivalentes. Para um deslocamento horizontal do bloco x_{eq}.

Em primeiro lugar, imagine um cilindro girando sem deslizar sobre um plano fixo. Se o centro do cilindro se move com velocidade $\dot{x}$, o ponto de contato do cilindro tem velocidade 0, caso contrário estaria deslizando, e o ponto no topo do cilindro tem velocidade $2\dot{x}$, já que tem a velocidade do centro de massa mais a velocidade devida à rotação do cilindro, que é $\dot{x}$ também. Se há um bloco em contato com o topo do cilindro, esta é a velocidade do bloco também, se não houver deslizamento.

Devido a isto, quando o bloco no topo do cilindro se move x_{eq}, o centro do cilindro se move de $x_{eq}/2$. Com isto podemos calcular as grandezas equivalentes.

Podemos visualizar isto na figura abaixo, onde as setas vermelhas indicam a velocidade de pontos no eixo central vertical do cilindro, iguais à velocidade de translação do centro de massa do cilindro, $\dot{x}$, neste caso, e as setas em azul indicam a velocidade devida à rotação do corpo, para pontos na periferia do cilindro, calculada em relação ao centro de massa, que também é igual a $\dot{x}$, devido ao não deslizamento.

As setas em verde indicam a soma destas duas velocidades, que é a velocidade absoluta (em relação ao piso) dos pontos no eixo vertical do cilindro. É óbvio que a bloco, devido ao não deslizamento, tem a mesma velocidade que a periferia do cilindro, $2\dot{x}$, no caso.



Massa equivalente

A energia cinética total do sistema é a energia cinética dos blocos mais a energia cinética total dos cilindros, que inclui a rotação e a translação. Assim,

$$T_{\text{orig}} = T_b + 2T_c.$$

A energia cinética do bloco é

$$T_b = \frac{1}{2}m_b\dot{x}_{eq}^2.$$

A energia cinética de cada cilindro é

$$T_c = \frac{1}{2}m_c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2,$$

onde $\dot{x}$ é a velocidade do centro do cilindro. Do exposto acima, $\dot{x} = \dot{x}_{eq}/2$, e $\dot{\theta} = \dot{x}/R = \dot{x}_{eq}/(2R)$. Assim, a energia cinética de cada cilindro é

$$T_c = \frac{1}{2}\frac{m_c}{4}\dot{x}_{eq}^2 + \frac{1}{2}\frac{J_0}{4R^2}\dot{x}_{eq}^2.$$

Para um cilindro, $J_0 = 1/2m_cR^2$, então a expressão acima torna-se

$$T_c = \frac{1}{2}\frac{m_c}{4}\dot{x}_{eq}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{m_cR^2}{4R^2}\dot{x}_{eq}^2.$$

Claramente, a energia cinética do cilindro é

$$T_c = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{m_c}{4}\dot{x}_{eq}^2 = \frac{1}{2}\frac{3m_c}{8}\dot{x}_{eq}^2.$$

A energia cinética original total é então

$$T_{\text{orig}} = \frac{1}{2}\left(m_b + \frac{3m_c}{4}\right)\dot{x}_{eq}^2.$$

Igualando este termo à energia cinética equivalente, $T_e = 1/2m_e\dot{x}_{eq}^2$, percebemos imediatamente que a massa equivalente é

$$m_e = m_b + \frac{3m_c}{4}.$$

Rigidez Equivalente

Para um deslocamento x_eq do bloco, o deslocamento das molas, que é igual ao deslocamento dos centros dos cilindros é $x_{eq}/2$ portanto a energia potencial total do sistema original é

$$U_{\text{orig}} = 2\frac{1}{2}k\frac{x_{eq}^2}{4},$$

é claro portanto que a rigidez equivalente é $k/2$. O fator 2 aparece pois há duas molas em paralelo.

Frequência natural

A frequência natural é dada por $\omega_n = \sqrt{k_{eq}/m_{eq}}$, ou, no caso

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{2(m_b + 3m_c/4)}}.$$

Falta apenas colocar os valores numéricos.

In [6]:
```
mb=2
mc=0.75
k=100
wn = np.sqrt(k/(2*(mb+0.75*mc)))
print(wn)
```

```
4.417261042993862
```

O período natural é então

In [7]:
```
Tn = 2*np.pi/wn
print(Tn)
```

```
1.422416571269935
```

Questão 3

Se o deslocamento é dado por $x(t) = 10e^{i(20t+\pi/2)}$, a aceleração é obtida derivando-se esta expressão duas vezes em relação ao tempo, então $\dot{x}(t) = 200ie^{i(20t+\pi/2)}$ e $\ddot{x}(t) = -4000e^{i(20t+\pi/2)}$. Para o tempo 2 segundos, a aceleração é

$$x(2) = -4000e^{i(40+\pi/2)},$$

que tem amplitude 4000 unidades de comprimento por segundo ao quadrado, fazendo um ângulo de $40 + \pi/2$ com o eixo real. Só para calcular este valor,

In [8]:
```
theta=(40+np.pi/2)
print(theta)
```

```
41.5707963267949
```

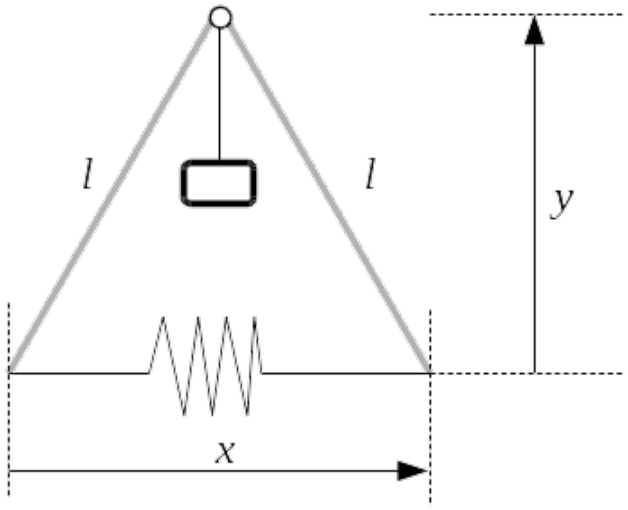
O valor da aceleração neste instante é, claramente, a parte real deste número, ou

In [9]:
```
a = -4000*np.cos(theta)
print(a)
```

```
2980.4526419173903
```

Questão 4

Para facilitar, vou tomar como coordenada generalizada o deslocamento horizontal da extremdidade direita da mola. Vou chamar de x a distância entre os apoios (o comprimento do lado horizontal, que é variável) e de y a altura do triângulo, que também é variável. A figura abaixo mostra estas grandezas esquematicamente.



Percebam que neste problema a gravidade não é uma força de restauração e pode ser completamente ignorada.

Observando um triângulo retângulo formado por meio comprimento do lado horizontal e pela altura, podemos escrever que

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = l^2$$

Daí podemos escrever $x^2 = 4(l^2 - y^2)$, e derivando dos dois lados em relação a y, temos

$$2x\frac{dx}{dy} = -4(2y),$$

o que leva

$$\frac{dx}{dy} = -4\frac{y}{x}.$$

Com esta relação, podemos calcular a velocidade da massa em função da velocidade no extremo livre, que é a coordenada generalizada escolhida. Usando a regra da cadeia do lado esquerdo da equação acima,

$$\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dy} = -4\frac{y}{x},$$

assim é claro que

$$\dot{y} = -\frac{1}{4}\frac{x}{y}\dot{x}.$$

Vamos dar um nome para o termo que multiplica $\dot{x}$,

$$\dot{y} = a\dot{x}, \qquad a = -\frac{1}{4}\frac{x}{y}.$$

Para a configuração mostrada, um triângulo equilátero, com os ângulos iguais a 60 graus, temos que

$$\frac{x}{y} = \frac{l}{l\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Temos então

In [10]:
```
a = -0.25*2/np.sqrt(3)
print(a)
```

```
-0.2886751345948129
```

A velocidade vertical é portanto aproximadamente 0.29 vezes a velocidade da extremidade livre.

O cálculo da massa equivalente é agora trivial. A energia cinética do sistema original é

$$T_{\text{orig}} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}ma^2\dot{x}^2,$$

o que mostra claramente que a massa equivalente é $m_{eq} = a^2m$.

A frequência natural é então,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{a^2m}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{4y}{x}\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Questão 5

A questão descreve um problema de vibração livre não amortecida, com condições iniciais dadas. Como a massa é concentrada, vamos tomar como coordenada generalizada o seu deslocamento vertical.

Precisamos então calcular a rigidez equivalente em relação a esta coordenada. Pelo enunciado a massa da viga é desprezível, portanto não precisamos calcular uma massa equivalente.

Para calcular a rigidez equivalente, vamos aplicar uma força concentrada na posição da massa concentrada, usando a fórmula dada,

$$y(x) = \frac{Pbx}{6EIl}(l^2 - x^2 - b^2).$$

No caso, $a = x = 3l/4$, $b = l/4$, então

$$y(a) = \frac{P(3l)(l)}{(4)(4)6EIl}\left(l^2 - \left(\frac{3l}{4}\right)^2 - \left(\frac{l}{4}\right)^2\right),$$

ou

$$y(a) = \frac{Pl}{32EI}\left(l^2 - \frac{9l^2}{16} - \frac{l^2}{16}\right) = \frac{Pl}{32EI}\left(l^2 - \frac{5l^2}{8}\right) = \frac{Pl}{32EI}\frac{3l^2}{8} = \frac{3Pl^3}{256EI}.$$

A rigidez é a relação entre a força aplicada e o deslocamento, portanto,

$$k = \frac{P}{y(a)} = \frac{256EI}{3l^3}.$$

No caso,

In [11]:
```
E = 210e9
b = 0.015
h = b
I = b*h**3/12
l = 2.0
k = 256*E*I/(3*l**3)
print(k)
```

```
9449.999999999998
```

A frequência natural é

In [12]:
```
m = 1
wn = np.sqrt(k/m)
print(wn)
```

```
97.2111104761179
```

Para o sistema em vibração livre, o deslocamento é dado por $x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi)$, portanto a velocidade é $\dot{x}(t) = -\omega_n A \sin(\omega_n t - \phi)$. A amplitude e ângulo de fase são calculados rapidamente com as fórmulas

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \phi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n x_0}\right).$$

Calculando os valores,

In [13]:
```
x0 = -0.01
v0 = 1
A = np.sqrt(x0**2 + (v0/wn)**2)
phi = np.arctan2(wn*x0, v0)
print(A, phi)
print(wn*A)
```

```
0.014346431814918504 -0.7712574609472417
1.3946325680981353
```

A equação de movimento é então

$$\dot{x}(t) = -1.057 \sin(34.4t + 0.331).$$