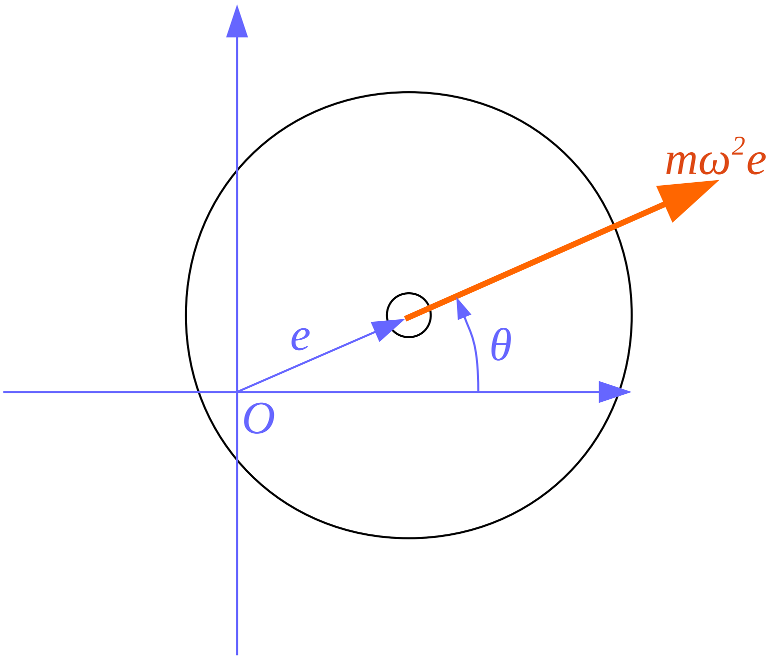
Questão 1

In [1]:
```
from math import pi, sin, cos, atan2
from math import sqrt
```

Em primeiro lugar, vamos examinar a força que é causada por disco girando descentralizado. Vamos manter em mente também que só estamos interessados no movimento na direção vertical.

Na figura abaixo, imaginamos que o disco de massa m esteja girando em torno do ponto O, com uma excentricidade e. Claramente isto causa uma força centrífuga de valor $m\omega^2 e$, conforme esquematizado.



Claramente a projeção desta força na direção vertical é $m\omega^2 e \sin\theta$.

Como cada disco gira a uma velocidade angular diferente, podemos tratar sistema como um sistema massa, mola, amortecedor submetido a duas forças de frequências diferentes. Como o sistema é linear podemos resolver para cada uma separadamente e somar os resultados.

Temos que tomar cuidado já que as forças, e portanto as respostas, tem frequências diferentes, então a resposta total não é harmônica. Vamos ter que "engenheirar" um pouco aí.

Para a polia menor, a força vertical aplicada é $F_1 = m_1\omega_1^2 e\sin(\omega_1 t)$, enquanto que para a polia maior a força é $F_2 = m_2\omega_2^2 e\sin(\omega_2 t)$. Como temos uma transmissão por correias, a razão das velocidades angulares é a razão inversa dos raios, assim $\omega_2 = \omega_1 r_1/r_2$ e $F_2 = m_2\omega_1^2(r_1/r_2)^2 e\sin(\omega_2 t)$.

Podemos calcular algumas coisas numericamente agora.

In [2]:
```
d1 = 0.120
d2 = 0.300
rho = 2700
e=0.001
h=0.01
A1 = pi*d1**2/4.0
A2 = pi*d2**2/4.0
print(A1, A2)
```

```
0.011309733552923255 0.07068583470577035
```

In [3]:
```
h = 0.01
v1 = A1*h
v2 = A2*h
m1 = rho*v1
m2 = rho*v2
print(m1, m2)
```

```
0.3053628059289279 1.9085175370557996
```

In [4]:
```
N = 1200
w1 = N*pi/30
w2 = w1*d1/d2
print(w1, w2)
```

```
125.66370614359172 50.26548245743669
```

In [5]:
```
F1 = m1*w1**2*e
F2 = m2*w2**2*e
print(F1, F2)
```

```
4.8220961493202275 4.822096149320228
```

Putzgrilla, as forças deram iguais, muito obviamente agora, mas este absolutamente não era o meu plano original. Ainda assim, *elas tem frequências diferentes* e **não podem ser somadas diretamente**. As forças são portanto $F_1 = 4.82\sin(126t)$ e $F_2 = 4.82\sin(50.3t)$.

A resposta de uma sistema com um grau de liberdade submetido a uma força harmônica é dada por

$$\frac{X}{\delta_{\text{st}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},$$

portanto precisamos calcular r para cada força e ζ. Claramente precisamos da frequência natural do sistema.

A massa total do sistema é dada pela massa das duas polias mais a massa da base e do motor, assim,

In [6]:
```
mb = 2
mm = 7
m = m1 + m2 + mb + mm
print(m)
```

```
11.213880342984726
```

In [7]:
```
k = 200e3
wn = sqrt(k/m)
print(wn)
```

```
133.5478925373876
```

Podemos calcular os fatores de amplificação para a força de cada polia

In [8]:
```
N1 = 1200
N2 = N1*d1/d2
print(N2)
```

```
480.0
```

In [9]:
```
w1 = N1 * pi/180
w2 = N2 * pi/180
print(w1, w2)
```

```
20.943951023931955 8.377580409572781
```

In [10]:
```
zeta = 0.005
def M(r, zeta):
    return 1.0/sqrt((1-r**2)**2+(2*zeta*r)**2)
r1 = w1/wn
r2 = w2/wn
print(r1, r2)
```

```
0.15682726717734283 0.06273090687093712
```

In [11]:
```
M1 = M(r1, zeta)
M2 = M(r2, zeta)
print(M1, M2)
```

```
1.0252136230022395 1.0039505142930352
```

Como as razões de frequência estão muito abaixo de 1, isto é, as frequências de excitação são muito baixas, o problema se comporta praticamente estaticamente. O que não era o meu plano original, mas segue a vida.

A deformação estática para cada força é

In [12]:
```
d1 = F1/k
d2 = F2/k
print(d1, d2)
```

```
2.4110480746601136e-05 2.4110480746601143e-05
```

Tem que ser iguais pois as forças são iguais.

As amplitudes de vibração são

In [13]:
```
X1 = M1*d1
X2 = M2*d2
print(X1, X2)
```

```
2.471839331854869e-05 2.420572954540254e-05
```

As respostas para cada força são então $x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$ e $x_2(t) = X_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$. Falta calcular os ângulos de fase, que devem ser próximos de 0 devido às baixas frequências.

In [14]:
```
phi1 = atan2(2*zeta*r1, 1-r1**2)
phi2 = atan2(2*zeta*r2, 1-r2**2)
print(phi1, phi2)
```

```
0.0016078152004032134 0.000629787303783762
```

In [15]:
```
tau1 = 2*pi/w1
print(tau1)
```

```
0.3
```

O maior período natural é 0.3 segundos, então vamos plotar uns 10 períodos para ver a cara das funções.

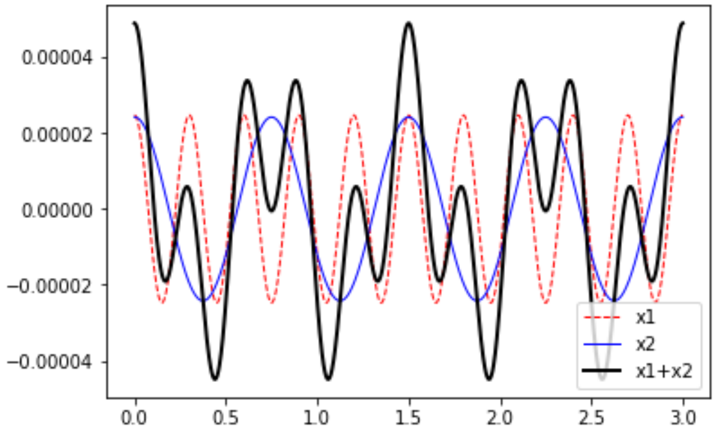
In [16]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

t = np.linspace(0, 10*tau1, 1001)
x1 = X1*np.cos(w1*t-phi1)
x2 = X2*np.cos(w2*t-phi2)

fig, ax = plt.subplots()
line1, = ax.plot(t, x1, '--', linewidth=1, label='x1', color="red")
line2, = ax.plot(t, x2, linewidth=1, label='x2', color="blue")
line3, = ax.plot(t, x1+x2, linewidth=2, label='x1+x2', color="black")

ax.legend(loc='lower right')
```

Out[16]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7fece778ab38>



É claro que determinar o valor máximo desta função não é fácil, no entanto, é uma consideração de engenharia muito razoável admitir que existem pontos nos quais as duas funlções estarão em fase e a amplitude será a soma das duas amplitudes.

Claramente não é necessário fazer esta parte gráfica na prova, isto está aqui só para ajudar a visualizar a resposta.

A força transmitida para o piso é $F(t) = kx(t) + c\dot{x}(t)$.

Já temos os deslocamentos, as velocidades são, $\dot{x}_1(t) = -\omega_1 X_1 \sin(\omega_1 t - \phi_1)$ e $\dot{x}_2(t) = -\omega_2 X_2 \sin(\omega_2 t - \phi_2)$.

Para uma determinada frequência de vibração, a força elástica e a força viscosa estão $\pi/2$ radianos fora de fase, portanto a magnitude todal da força é $F = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2} = X\sqrt{k^2 + (c\omega)^2} = Xk\sqrt{1 + (2\zeta r)^2}$.

No caso, temos

In [17]:
```
F1 = X1*k*sqrt(1+(2*zeta*r1)**2)
F2 = X2*k*sqrt(1+(2*zeta*r2)**2)
print(F1, F2)
```

```
4.943684743143355 4.841146861616218
```

Apesar das forças terem frequências diferentes, podemos usar o mesmo raciocício que fizemos acima e apenas somar as magnitudes, já que provavelmente existe um ponto onde as duas estão em fase, e na pior das hipóteses estaremos errando pelo lado da segurança. Assim, a força máxima transmitida é

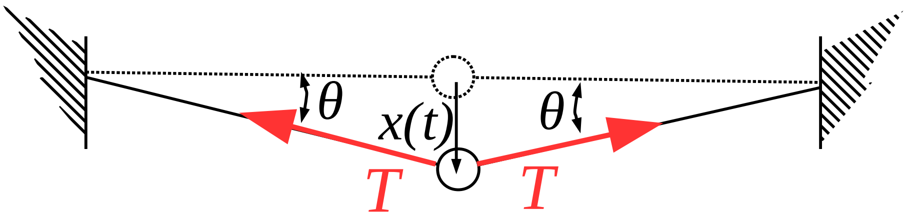
In [18]:
```
F = F1 + F2
print(F)
```

```
9.784831604759573
```

Questão 2

Este é um problema de vibração livre amortecida com um grau de liberdade, só precisamos calcular os parâmetros adequados e usar as fórmulas dadas.

Na figura abaixo estão mostradas as forças que agem sobre a massa quando ela está deslocada do centro. Do enunciado sabemos que as forças são constantes, independentes do deslocamento da massa.



Claramente, vamos considerar apenas pequenos deslocalmentos verticais $x(t)$ da massa, o que implica que os ângulos $\theta(t)$ serão pequenos também. Para um deslocamento vertical x a força total que age sobre a massa que resiste a este deslocamento é $F = 2T \sin\theta \approx 2T\theta$.

O deslocamento vertical pode ser aproximado por $x \approx l\theta$, e, claramente, a rigidez equivalente é

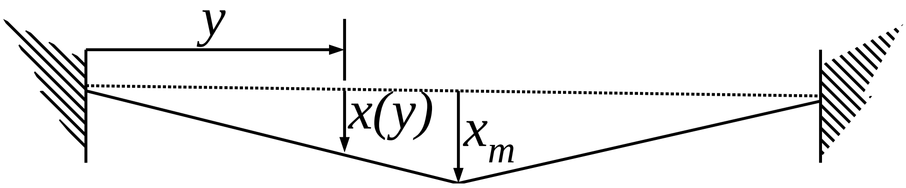
$$k = F/x = 2T\theta/l\theta = 2T/l,$$

onde l é metade do comprimento total do fio ou a distância da massa até a parede. No caso, temos

In [19]:
```
T=1200
l=0.7/2
k=2*T/l
print(k)
```

```
6857.142857142858
```

Precisamos calcular a massa equivalente, que considera a massa concentrada no centro e massa do fio. Podemos fazer isto calculando a energia cinética equivalente do sistema, então temos que ver como a velocidade transversão do fio varia ao longo do fio.



O deslocamento vertical ao longo de cada metade do fio é dado por

$$x(y) = x_m y/l$$

, já que o deslocamento, por hipótese, é linear. Como nossa hipótese fundamental para este tipo de problema é que o deslocamento de todos os pontos é harmônico e em fase. Assim, se o deslocamento da massa central é $x_m(t) = X_m \cos(\omega t)$, o deslocamento de um ponto arbitrário ao longo do fio é $x(y,t) = X_m y \cos(\omega t)/l$. Claramente a velocidade em um ponto arbitrário do fio é $\dot{x}(y,t) = -X_m y\omega \sin(\omega t)/l$ e a velocidade máxima neste ponto é $\dot{x}(y) = X_m y\omega/l$.

A energia cinética total de um pedaço infinitesimal do fio na posição y é $dT = 1/2\, dm\dot{x}^2$. No caso, então, ao longo do fio, temos

$$dT = \frac{1}{2}\frac{X_m^2 y^2 \omega^2}{l^2} dm.$$

Vamos definir ρ como a densidade linear do fio, isto é $\rho = m_f/(2l)$, e assim, $dm = \rho dy$. A energia cinética torna-se

$$dT = \frac{1}{2}\frac{X_m^2 y^2 \omega^2}{l^2} \rho dy.$$

A energia cinética total é então

$$T = \int_0^l dT = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{X_m^2 y^2 \omega^2}{l^2} \rho dy = \frac{1}{2}\frac{X_m^2 \omega^2 \rho}{l^2}\int_0^l y^2 dy,$$

integrando

$$T = \frac{1}{2}\frac{X_m^2 \omega^2 \rho}{l^2}\frac{y^3}{3}\bigg|_0^l = \frac{1}{2}\frac{X_m^2 \omega^2 \rho}{l^2}\frac{l^3}{3} = \frac{1}{2}\frac{X_m^2 \omega^2 \rho l}{3}.$$

É claro que ρl é a massa de uma das metades do fio, $m_f/2$. Temos então,

$$T = \frac{1}{2}\frac{X_m^2 \omega^2 m_f}{2 \times 3},$$

mas, lembrando que isto é só para uma das metades, a energia cinética total do fio é

$$T = \frac{1}{2}\frac{X_m^2 \omega^2 m_f}{3},$$

Uma massa concentrada m_e vibrando em movimento harmônico com amplitude X_m e frequência ω tem energia cinética $T = 1/2 m_e X_m^2 \omega^2$, comparando as duas expressões, a massa equivalente é

$$m_e = \frac{1}{3} m_f,$$

o que não deveria ser surpresa a esta altura do campeonato, para deslocamentos lineares. No caso então,

In [20]:
```
mf=0.2
me=mf/3
mm=0.15
m=me+mm
print(m)
```

```
0.21666666666666667
```

Daqui para a frente tudo é trivial. A frequência natural é

In [21]:
```
wn=sqrt(k/m)
print(wn)
```

```
177.8998359986643
```

Podemos também calcular ζ,

In [22]:
```
c=55
cc = 2*m*wn
print(cc)
zeta=c/cc
print(zeta)
```

```
77.08992893275453
0.7134524672863098
```

O amortecimento é bem alto, então esperamos um sistema cuja amplitude de vibração caia muito rapidamente. Para um sistema em vibração livre amortecida, a frequência de vibração é $\omega_d = \sqrt{(1-\zeta^2)}\omega_n$, assim

In [23]:
```
wd=sqrt(1-zeta**2)*wn
print(wd)
```

```
124.65506083882174
```

Esta é a frequência circular em radianos por segundo, queremos a frequência em Herz, dado por $f = \omega/(2\pi)$.

In [24]:
```
fd=wd/(2*pi)
print(fd)
```

```
19.839469113919424
```

A massa cruza a origem aproximadamente 20 vezes por segundo.

O decremento logarítmico é dado por

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{1-\zeta^2}.$$

Não podemos usar a fórmula simplificada pois ζ é próximo de 1. Temos então,

In [25]:
```
delta = (2*pi*zeta)/(1-zeta**2)
print(delta)
```

```
9.130113531882186
```

Sabemos também que

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right).$$

Podemos então calcular quantos ciclos são necessário para que a amplitude seja 1% da amplitude inicial, isto é,

$$n = \frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{100}{1}\right).$$

In [26]:
```
from math import log

n = log(100)/delta
print(n)
```

```
0.504393529161157
```

Então, basicamente, teremos um único cíclo de vibração até que a massa chegue ao repouso, com o tempo de

In [27]:
```
taud = 1/fd
print(taud)
```

```
0.05040457455075738
```

A resposta amortecida é dada por $x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$. Só é necessário agora calcular X e ϕ. Como a velocidade inicial é nula, as fórmulas para estas duas grandezas simplificam-se para

$$X = \frac{x_0\omega_n}{\omega_d} \qquad \phi = \arctan\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}.$$

In [28]:
```
x0 = 7
X = x0*wn/wd
phi=atan2(zeta*wn, wd)
print(X, phi)
```

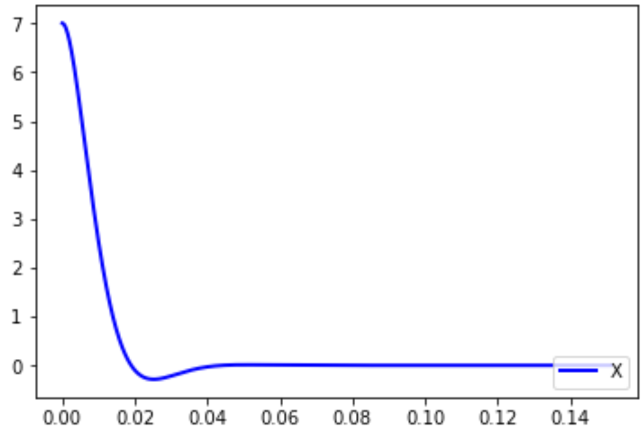
```
9.989958238445 0.7944130748860985
```

Plotando a figura par ver o jeitão,

In [29]:
```
t = np.linspace(0, 3*taud, 1001)

x = X*np.exp(-zeta*wn*t)*np.cos(wd*t-phi)
fig, ax = plt.subplots()
line, = ax.plot(t, x, linewidth=2, label='X', color="blue")
ax.legend(loc='lower right')
```

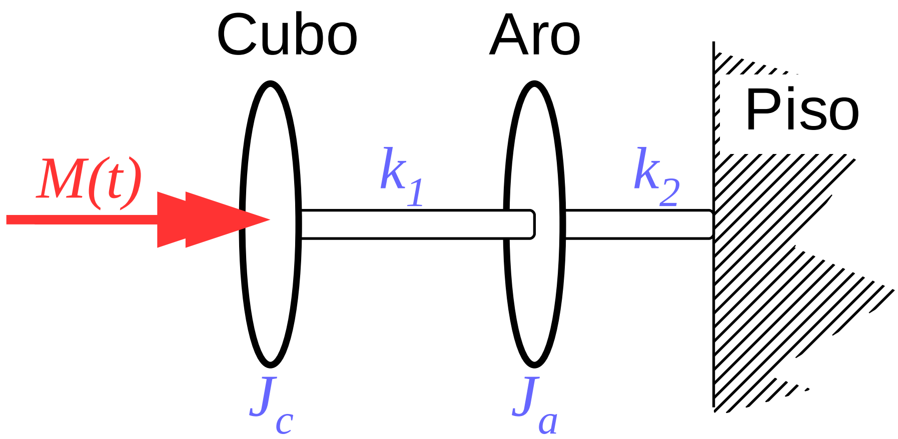
Out[29]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7fece76c03c8>



O que mostra o que acontece com o amortecimento alto, e confirma o valor numérico calculado acima.

Questão 3

Este é um problema com dois graus de liberdade, não amortecido, em vibração forçada. Claramente é um problema de vibração torcional. Podemos representar o sistema esquematicamente como mostrado na figura abaixo.



As rigidezes nesta figura devem ser entendidas como rigidezes à torção, isto é, a razão entre entre o momento aplicado e o ângulo de rotação causado por este momento. Fazendo diagramas de corpo livre para cada parte, podemos escrever as equações de movimento do sistema.

Para o cubo,

$$J_c\ddot{\theta}_c = M(t) - k_1(\theta_c - \theta_a),$$

e para o aro,

$$J_a\ddot{\theta}_a = k_1(\theta_c - \theta_a) - k_2\theta_a.$$

Podemos rearrumar o sistema para,

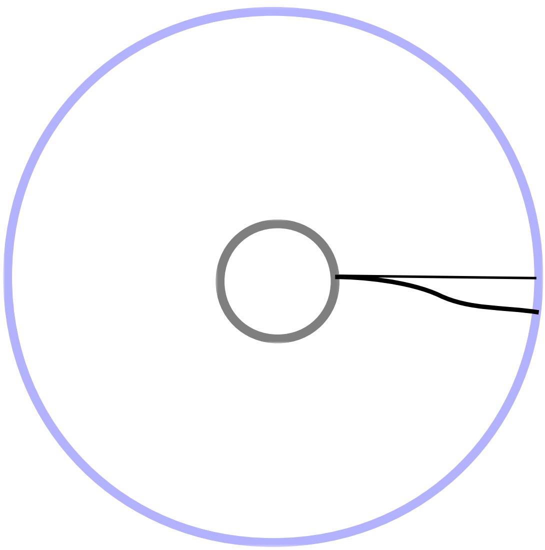
$$\begin{cases} J_c\ddot{\theta}_c + k_1\theta_c - k_1\theta_a = M(t) \\ J_a\ddot{\theta}_a - k_1\theta_c + (k_1 + k_2)\theta_a = 0 \end{cases}$$

Podemos colocar o sistema na forma matricial

$$\begin{pmatrix} J_c & 0 \\ 0 & J_a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_c \\ \ddot{\theta}_a \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \theta_c \\ \theta_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}$$

Felizmente não há amortecimento, todos os números serão reais, bem como a matriz de impedância mecânica. Claramente a matriz desta equação é a matriz de massa e a segunda é a matriz de rigidez.

A rigidez torcional k_1 mostrada na figura é causada pela resistência â flexão dos raios. Olhando na figura abaixo, muito mal desenhada, podemos imaginar que os raios flexionam como vigas engastadas nas duas extremidades, com comprimento igual à diferença entre o raio interno do aro e externo do cubo.



Como estamos considerando apenas pequenos deslocamentos, a deflexão na extremidade da viga conectada ao aro em pode ser calculada como $y = (r_a - r_c)\theta$, onde r_a e r_c são os raios inteno do aro e extern do cubo, respectivamente. É dado no formulário que para uma viga biengastada a relacão entre a deflexão e a carga aplicada é dada por

$$P = ky = \frac{12EI}{l^3}y,$$

onde o comprimento l é dado pela diferença entre os raios, $l = r_a - r_c$.