Vibrações Mecânicas **4º EE** **2º Semestre de 2017 Turma MM**

1) Imagine que uma longa barra de vidro, com comprimento igual a 1,5m e diâmetro igual a 10mm, que é engastada em uma extremidade e livre na outra, seja colocada em vibração axial livre, com condições iniciais que garantem que a vibração ocorra apenas no terceiro modo normal. Sabendo que o vidro do qual a barra é composta tem módulo de Young igual a 70GPa e limite de resistência à tração igual a 33MPa, qual a maior amplitude de vibração que pode ocorrer na barra antes que a mesma rompa? *(Valor 4 pontos.)*

2) Calcule de maneira exata a massa equivalente de uma viga uniforme bi-apoiada, considerada como concentrada em seu ponto central, e compare este valor com o que seria calculado se fosse calculada considerando a deflexão causada por uma carga concentrada aplicada em seu centro, dada pela fórmula $y(x)=\frac{P}{12EI}\left(\frac{3l^2}{4}-x^2\right)$, para $0\leq x\leq\frac{l}{2}$. Qual o erro percentual se usarmos a fórmula aproximada? *(Valor 4 pontos.)*

3) Faça um esquema do segundo modo de vibração de um cabo flexível que tem uma extremidade fixa e a outra presa a uma mola transversal, que produz uma força diretamente proporcional ao deslocamento desta extremidade. Imagine que a mola tem rigidez tal que a força transversal produzida é mais ou menos da mesma magnitude que a tração no cabo. *(Valor 2 pontos)*.

Fórmulas no verso!

End Conditions of Shaft	Boundary Conditions	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Natural Frequencies
Fixed-free	$\theta(0,t)=0$ $\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=0$	$\cos\frac{\omega l}{c}=0$	$\theta(x)=C_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n=\frac{(2n+1)\pi c}{2l}$; $n=0,1,2,\ldots$
Free-free	$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t)=0$ $\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$\theta(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$; $n=0,1,2,\ldots$
Fixed-fixed	$\theta(0,t)=0$ $\theta(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$\theta(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$; $n=1,2,3,\ldots$

FIGURE 8.12 Boundary conditions for uniform shafts (rods) subjected to torsional vibration.

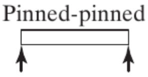
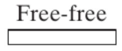
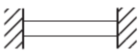
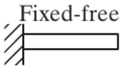
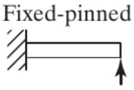
$$c=\sqrt{\frac{P}{\rho}}\quad c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\quad c=\sqrt{\frac{G}{\rho}}\quad c=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\quad \alpha\tan\alpha=\beta\quad \beta=\frac{m}{M}\quad \boxed{\omega=2\pi f}\quad \boxed{f=\frac{1}{\tau}}$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,\quad T=\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2,\quad U=\frac{1}{2}\kappa x^2,\quad U=\frac{1}{2}F\,x}\quad \boxed{Z_{rs}(i\omega)=-\omega^2 m_{rs}+i\,\omega\,c_{rs}+k_{rs}}\quad \boxed{\boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F_0}}$$

$$\boxed{\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k_t}{J_0}},\quad \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\quad \zeta=\frac{c}{c_c},\quad c_c=2\,m\,\omega_n}\quad \boxed{\delta_{st}=\frac{F_0}{k}}\quad \boxed{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1}\boldsymbol{F_0}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Z}(i\omega)=\begin{bmatrix}Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega)\\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega)\end{bmatrix}}\quad \boxed{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}}\quad \boxed{\delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right),\quad \delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},\quad \delta=2\pi\zeta \text{ para } \zeta\ll 1}$$

$$\boxed{\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}\quad \boxed{H(i\omega)=\frac{1}{(1-r^2)+i\,2\,\zeta\,r},\ |H(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$$

End Conditions of Beam	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Value of $\beta_n l$
Pinned-pinned 	$\sin\beta_n l=0$	$W_n(x)=C_n[\sin\beta_n x]$	$\beta_1 l=\pi$ $\beta_2 l=2\pi$ $\beta_3 l=3\pi$ $\beta_4 l=4\pi$
Free-free 	$\cos\beta_n l\cdot\cosh\beta_n l=1$	$W_n(x)=C_n[\sin\beta_n x+\sinh\beta_n x+\alpha_n(\cos\beta_n x+\cosh\beta_n x)]$ where $\alpha_n=\left(\frac{\sin\beta_n l-\sinh\beta_n l}{\cosh\beta_n l-\cos\beta_n l}\right)$	$\beta_1 l=4.730041$ $\beta_2 l=7.853205$ $\beta_3 l=10.995608$ $\beta_4 l=14.137165$ ($\beta l=0$ for rigid-body mode)
Fixed-fixed 	$\cos\beta_n l\cdot\cosh\beta_n l=1$	$W_n(x)=C_n[\sinh\beta_n x_n x-\sin\beta_n x+\alpha_n(\cosh\beta_n x-\cos\beta_n x)]$ where $\alpha_n=\left(\frac{\sinh\beta_n l-\sin\beta_n l}{\cos\beta_n l-\cosh\beta_n l}\right)$	$\beta_1 l=4.730041$ $\beta_2 l=7.853205$ $\beta_3 l=10.995608$ $\beta_4 l=14.137165$
Fixed-free 	$\cos\beta_n l\cdot\cosh\beta_n l=-1$	$W_n(x)=C_n[\sin\beta_n x-\sinh\beta_n x-\alpha_n(\cos\beta_n x-\cosh\beta_n x)]$ where $\alpha_n=\left(\frac{\sin\beta_n l+\sinh\beta_n l}{\cos\beta_n l+\cosh\beta_n l}\right)$	$\beta_1 l=1.875104$ $\beta_2 l=4.694091$ $\beta_3 l=7.854757$ $\beta_4 l=10.995541$
Fixed-pinned 	$\tan\beta_n l-\tanh\beta_n l=0$	$W_n(x)=C_n[\sin\beta_n x-\sinh\beta_n x+\alpha_n(\cosh\beta_n x-\cos\beta_n x)]$ where $\alpha_n=\left(\frac{\sin\beta_n l-\sinh\beta_n l}{\cos\beta_n l-\cosh\beta_n l}\right)$	$\beta_1 l=3.926602$ $\beta_2 l=7.068583$ $\beta_3 l=10.210176$ $\beta_4 l=13.351768$

$$\omega=\beta^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}=(\beta l)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

	Values of the Mass Ratio β				
	0.01	**0.1**	**1.0**	**10.0**	**100.0**
Value of α_1 $\left(\omega_1=\frac{\alpha_1 c}{l}\right)$	0.1000	0.3113	0.8602	1.4291	1.5549
Value of α_2 $\left(\omega_2=\frac{\alpha_2 c}{l}\right)$	3.1448	3.1736	3.4267	4.3063	4.6658