2017.2 4o EE Turma MM

Questão 1

Claramente esta é uma questão na qual temos um sistema contínuo, unidimensional, em vibração axial, com uma extremidade livre e uma engastada. Do formulário, sabemos que os modos normais para esta situação são dados por

$$u_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Para o terceiro modo, temos $n = 2$, e a fórmula torna-se,

$$u_3(x) = C_3 \sin \frac{5\pi x}{2l}.$$

É claro que a amplitude de vibração é dada por C_3.

É dado no enunciado que a tensão de ruptura do vidro é 33MPa, com isto podemos calcular a deformação máxima admissível, já que para um sistema unidimensional em tração, $\sigma = E\epsilon$ e $\epsilon = du/dx$. Assim,

In [1]:
```
E = 70e9    # Pa
smax = 33e6 # Pa
emax = smax/E
emax
```

Out[1]: 0.0004714285714285714

Para o terceiro modo, a derivada do deslocamento em relação à posição é

$$\frac{du}{dx} = C_3 \frac{5\pi}{2l} \cos \frac{5\pi x}{2l},$$

cujo valor máximo é claro que é

$$\frac{du}{dx}_{\max} = C_3 \frac{5\pi}{2l}.$$

Igualando este valor à máxima deformação admissível, temos

In [2]:
```
from math import pi

l = 1.5    # m
C3 = 2*l*emax/(5*pi)
C3
```

Out[2]: 9.003622494912937e-05

Esta questão é ridiculamente trivial para valer quatro pontos. Apenas para ilustrar (não era necessário fazer isto na prova,) vamos ver um gráfico da resposta.

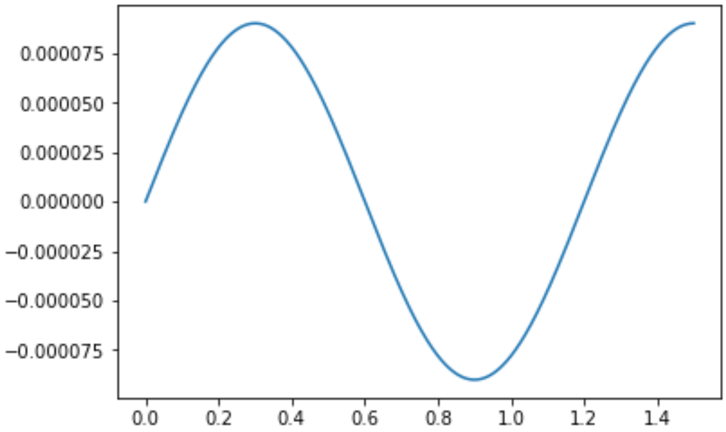
In [3]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

%matplotlib inline

x = np.linspace(0, l, 1001)
u = C3*np.sin(5*pi*x/(2*l))

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.plot(x, u)
```

Out[3]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcfd7095b38>]
```



A barra pode romper-se na extremidade esquerda ou em qualquer um dos outros nós (pontos com deslocamento nulo.)

Questão 2

Para uma viga bi-apoiada, a tabela no formulário mostra que o primeiro modo de vibração é dado por

$$W_1(x) = C_1 \sin \beta_1 x,$$

com $\beta_1 l = \pi$, assim

$$W_1(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Vamos considerar como coordenada generalizada equivalente o deslocamento no centro da viga. Chamando este deslocamento de w_m, temos que

$$W_1\left(\frac{l}{2}\right) = w_m = C_1 \sin \frac{\pi l}{2l},$$

portanto $w_m = C_1$ e o deslocamento da viga em função do deslocamento máximo, em seu centro, é

$$W_1(x) = w_m \sin \frac{\pi x}{l}.$$

A hipótese fundamental é que o deslocamento em todos os pontos ao longo da viga é harmônico e em fase. A energia cinética total da viga é a integral da energia cinética de cada elemento de comprimento dx,

$$T = \int_0^l dT,$$

com

$$dT = \frac{1}{2} dm \dot{w}(x)^2,$$

onde dm é o elemento de massa ao longo do comprimento, dado por $dm = \rho A dx$, onde A é a seção transversal da viga.

Um modo normal da viga tem a forma $w(x,t) = W(x)\sin(\omega t)$, onde o $\sin$ está sendo usado para representar uma função harmônica arbitrária, que depende das condições iniciais, mas com frequência ω. A velocidade transversal é então $\dot{w}(x,t) = \omega W(x)\cos(\omega t)$. É claro então que a velocidade máxima em cada ponto é $\dot{w}(x)_m = \omega W(x)$. A energia cinética de um elemento torna-se então,

$$dT = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 W(x)^2 dx.$$

A energia cinética total da viga é então

$$T = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 \int_0^l W(x)^2 dx.$$

Observe que esta expressão é válida para qualque forma de vibração da viga, não precisa ser um modo normal.

Para o primeiro modo normal, no entanto, temos

$$T = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 \int_0^l w_m^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 w_m^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(\pi x/l)\cos(\pi x/l)}{2\pi/l} \right]_0^l,$$

$$T = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 w_m^2 \frac{l}{2},$$

mas, claramente, $\rho A l = m$, portanto

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 w_m^2 \frac{m}{2}.$$

Admitindo uma massa concentrada no centro, vibrando com mesma frequência e amplitude máxima, temos a energia cinética igual a

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \omega^2 w_m^2.$$

Comparando as expressões, é claro que a massa equivalente calculada com o primeiro modo é

$$m_{\text{eq}} = \frac{m}{2}.$$

O deslocamento estático no centro da viga é dado por

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{12EI}\left(\frac{3l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{Pl^2}{24EI} = w_m.$$

Podemos reescrever isto como

$$w_m = \frac{P}{12EI}\frac{l^2}{2},$$

ou,

$$\frac{P}{12EI} = \frac{2w_m}{l^2}.$$

Assim podemos reescrever o deslocamento devido a uma carga concentrada como

$$y(x) = \frac{2w_m}{l^2}\left(\frac{3l^2}{4} - x^2\right).$$

Esta expressão só vale para $0 \leq x \leq l/2$, portanto temos que dividir a integral e usar a simetria.

Podemos então usar esta expressão como o deslocamento na fórmula para a energia cinética, então,

$$T = \frac{1}{2}\rho A\omega^2 2\int_0^{l/2} \frac{4w_m^2}{l^4}\left(\frac{3l^2}{4} - x^2\right)^2 dx,$$

ou

$$T = \frac{1}{2}\rho A\omega^2 2\frac{4w_m^2}{l^4}\int_0^{l/2} \left(\frac{3l^2}{4} - x^2\right)^2 dx$$

ou

$$T = \frac{1}{2}\rho A\omega^2 2\frac{4w_m^2}{l^4}\frac{9l^5}{40} = \frac{1}{2}\rho A\omega^2 w_m^2\frac{18l}{10},$$

mas, novamente, $m = \rho Al$, e então,

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 w_m^2 m\frac{18}{10},$$

Comparando com a energia cinética da massa equivalente, vemos que a massa equivalente neste caso é $1.8m$. O que absolutamente não faz o menor sentido, a massa equivalente, neste contexto, não pode ser maior do que a massa total da viga. O problema está na fórmula para a deflexão usada, que obviamente não pode estar certa, pois a deflexão em $x = 0$ não é zero. Então a comparação com a fórmula correta não faz sentido, mas, obviamente, o procedimento acima deveria ter sido seguido de qualquer forma.

Para sua informação, a fórmula correta é

$$y(x) = \frac{Px}{12EI}\left(\frac{3l^2}{4} - x^2\right),$$

(percebam que tem um x do lado de fora dos parênteses.) Então refazendo, para deixar registrado,

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{24EI}\left(\frac{3l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{Pl^3}{48EI} = w_m.$$

Então

$$\frac{P}{12EI} = \frac{4w_m}{l^3},$$

e o deslocamento torna-se,

$$y(x) = \frac{4w_m x}{l^3}\left(\frac{3l^2}{4} - x^2\right).$$

A energia cinética é então,

$$T = \frac{1}{2}\rho A\omega^2 2\frac{16w_m^2}{l^6}\int_0^{l/2} x^2\left(\frac{3l^2}{4} - x^2\right)^2 dx,$$

ou

$$T = \frac{1}{2}\rho A\omega^2\frac{16w_m^2}{l^6}\frac{34l^7}{1120} = \frac{1}{2}\rho Al\omega^2 w_m^2\frac{544}{1120} = \frac{1}{2}m\omega^2 w_m^2 0.486.$$

Comparando este valor com a energia cinética da massa equivalente, temos que

$$m_{\text{eq}} = 0.486m.$$

Claramente, o erro percentual em considerar a fórmula para o deslocamento estático é pequeno, sendo igual a

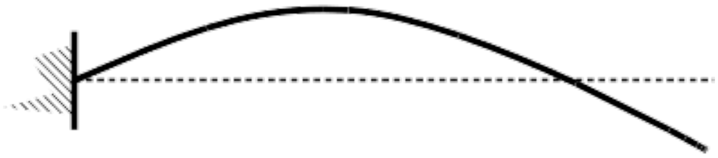
```
In [4]: err = (0.5-0.486)/0.5*100
        err
```

```
Out[4]: 2.8000000000000025
```

Sendo da ordem de 3% apenas! Por isto que nós fazemos isto.

Questão 3

Deve ser feito um esquema como o mostrado abaixo,



Onde o importante é mostrar que do lado esquerdo o deslocamento é nulo e a derivada é não nula, e do lado direito o deslocamento e a derivada são não nulo

```
In [ ]:
```