Vibrações Mecânicas **4º EE** **2º Semestre de 2017 Turma MC**

1) Considere uma barra aço de comprimento igual a 1m e diâmetro igual a 5mm, que pode sofrer deslocamento axial apenas. Uma das extremidades é livre e na outra existe uma massa concentrada igual a 25kg. Compare a primeira frequência natural do problema com a que seria calculada se o sistema fosse considerado um sistema com 1 grau de liberdade, com a mass da barra desprezível. Qual o erro percentual cometido? Para o aço, o módule de elasticidade é 210GPa e a massa específica é 7700kg/m³ *(Valor 4 pontos.)*

2) Para uma viga em vibração transversal, faça um esquema do segundo modo normal, considerando uma viga engastada-livre, do primeiro modo normal (no qual existe vibração) de uma viga livre-livre, e do segundo modo normal para uma viga engastada-apoiada. Identifique corretamente as condições de contorno em cada extremidade da viga. *(Valor 3 pontos.)*

3) Acredite que a energia de deformação elástica armazenada em uma barra submetida à vibração axial seja proporcional ao quadrado da deformação específica. Mostre que, para uma barra fixa em suas duas extremidades, a energia de deformação associada a cada modo é tanto maior quanto maior for a frequência natural, ou, em outras palavras, o número do modo normal. (*Valor 3 pontos)*.

Fórmulas no verso!

End Conditions of Shaft	Boundary Conditions	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Natural Frequencies
Fixed-free	$\theta(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$\theta(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Free-free	$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$\theta(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Fixed-fixed	$\theta(0, t) = 0$ $\theta(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$\theta(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

FIGURE 8.12 Boundary conditions for uniform shafts (rods) subjected to torsional vibration.

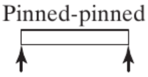
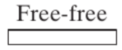
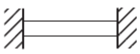
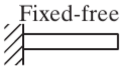
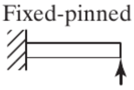
$c=\sqrt{\frac{P}{\rho}}$ $c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $c=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ $c=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ $\alpha\tan\alpha=\beta$ $\alpha=\frac{\omega l}{c}$ $\beta=\frac{m}{M}$ $\boxed{\omega=2\pi f}$ $\boxed{f=\frac{1}{\tau}}$

$\boxed{T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,\quad T=\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2,\quad U=\frac{1}{2}\kappa x^2,\quad U=\frac{1}{2}F x}$ $\boxed{Z_{rs}(i\omega)=-\omega^2 m_{rs}+i\omega c_{rs}+k_{rs}}$ $\boxed{\boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F_0}}$

$\boxed{\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k_t}{J_0}},\quad \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\quad \zeta=\frac{c}{c_c},\quad c_c=2m\omega_n}$ $\boxed{\delta_{st}=\frac{F_0}{k}}$ $\boxed{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1}\boldsymbol{F_0}}$

$\boxed{\boldsymbol{Z}(i\omega)=\begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega)\end{bmatrix}}$ $\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}}$ $\boxed{\delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right),\quad \delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},\quad \delta=2\pi\zeta \text{ para } \zeta\ll 1}$

$\boxed{\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$ $\boxed{H(i\omega)=\frac{1}{(1-r^2)+i2\zeta r},\ |H(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$

End Conditions of Beam	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Value of $\beta_n l$
Pinned-pinned 	$\sin\beta_n l=0$	$W_n(x)=C_n[\sin\beta_n x]$	$\beta_1 l=\pi$ $\beta_2 l=2\pi$ $\beta_3 l=3\pi$ $\beta_4 l=4\pi$
Free-free 	$\cos\beta_n l\cdot\cosh\beta_n l=1$	$W_n(x)=C_n[\sin\beta_n x+\sinh\beta_n x+\alpha_n(\cos\beta_n x+\cosh\beta_n x)]$ where $\alpha_n=\left(\frac{\sin\beta_n l-\sinh\beta_n l}{\cosh\beta_n l-\cos\beta_n l}\right)$	$\beta_1 l=4.730041$ $\beta_2 l=7.853205$ $\beta_3 l=10.995608$ $\beta_4 l=14.137165$ ($\beta l=0$ for rigid-body mode)
Fixed-fixed 	$\cos\beta_n l\cdot\cosh\beta_n l=1$	$W_n(x)=C_n[\sinh\beta_n x_n x-\sin\beta_n x+\alpha_n(\cosh\beta_n x-\cos\beta_n x)]$ where $\alpha_n=\left(\frac{\sinh\beta_n l-\sin\beta_n l}{\cos\beta_n l-\cosh\beta_n l}\right)$	$\beta_1 l=4.730041$ $\beta_2 l=7.853205$ $\beta_3 l=10.995608$ $\beta_4 l=14.137165$
Fixed-free 	$\cos\beta_n l\cdot\cosh\beta_n l=-1$	$W_n(x)=C_n[\sin\beta_n x-\sinh\beta_n x-\alpha_n(\cos\beta_n x-\cosh\beta_n x)]$ where $\alpha_n=\left(\frac{\sin\beta_n l+\sinh\beta_n l}{\cos\beta_n l+\cosh\beta_n l}\right)$	$\beta_1 l=1.875104$ $\beta_2 l=4.694091$ $\beta_3 l=7.854757$ $\beta_4 l=10.995541$
Fixed-pinned 	$\tan\beta_n l-\tanh\beta_n l=0$	$W_n(x)=C_n[\sin\beta_n x-\sinh\beta_n x+\alpha_n(\cosh\beta_n x-\cos\beta_n x)]$ where $\alpha_n=\left(\frac{\sin\beta_n l-\sinh\beta_n l}{\cos\beta_n l-\cosh\beta_n l}\right)$	$\beta_1 l=3.926602$ $\beta_2 l=7.068583$ $\beta_3 l=10.210176$ $\beta_4 l=13.351768$

$$\omega=\beta^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}=(\beta l)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

	Values of the Mass Ratio β				
	0.01	**0.1**	**1.0**	**10.0**	**100.0**
Value of α_1 $\left(\omega_1=\frac{\alpha_1 c}{l}\right)$	0.1000	0.3113	0.8602	1.4291	1.5549
Value of α_2 $\left(\omega_2=\frac{\alpha_2 c}{l}\right)$	3.1448	3.1736	3.4267	4.3063	4.6658