2017.2 4o EE Turma MC

In [1]:
```
from math import pi, sqrt
```

Questão 1

Este é um problema com a massa concentrada na extremidade da barra, então temos que usar a equação

$$\alpha \tan\alpha = \beta,$$

com $\beta = m/M$, $\alpha = \omega l/c$ e $c = \sqrt{E/\rho}$, já que se trata de um problema de deslocamento axial. Temos tudo o que é necessário no enunciado.

In [2]:
```
d = 0.005          # m
A = pi*d**2/4.0    # m^2
l = 1.0            # m
V = A*l            # m^3
rho = 7700         # kg/m^3
m = rho*V        # kg
m, V, A
```

Out[2]:
```
(0.1511891464540088, 1.9634954084936207e-05, 1.9634954084936207e-0
5)
```

In [3]:
```
M = 25    # Kg
beta = m/M
beta
```

Out[3]:
```
0.006047565858160352
```

O menor valor β dado na tabela é $\beta = 0.01$, nosso valor é aproximadamente 60% disto, vamo usar então uma interpolação linear para calcular α_1.

In [4]:
```
alpha1 = (0.1/0.01)*beta
alpha1
```

Out[4]:
```
0.06047565858160352
```

A velocidade do som na barra é

In [5]:
```
E = 210e9          # Pa
c = sqrt(E/rho)    # m/s
c
```

Out[5]:
```
5222.329678670935
```

A primeira frequência natural é então,

```
In [6]: w1 = alpha1*c/l    # rad/s
        w1
```

```
Out[6]: 315.8238266478787
```

Considerando agora a barra como uma uma mola sem massa, sua rigidez é dada (trivialmente calculável nesta altura do campeonato) por $k = EA/l$. Assim,

```
In [7]: keq = E*A/l
        keq
```

```
Out[7]: 4123340.3578366037
```

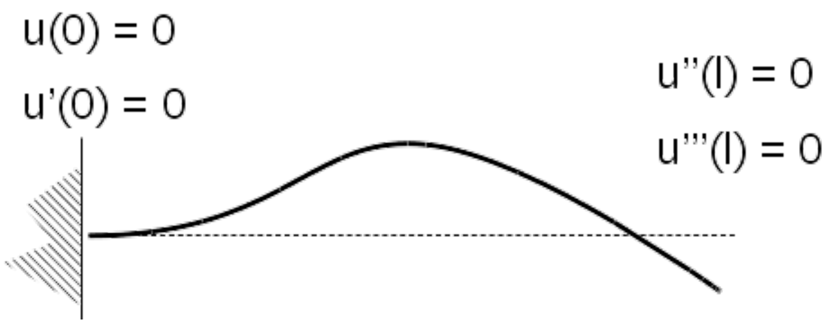
```
In [8]: w1b = sqrt(keq/M)
        w1b
```

```
Out[8]: 406.120196879525
```

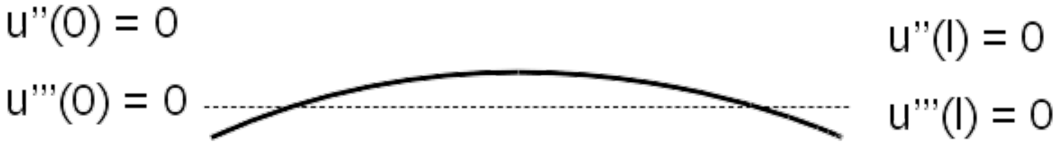
Percebam que há ainda uma diferença não desprezível em relação à consideração mais exata do comportamento dinâmico da barra!

Questão 2

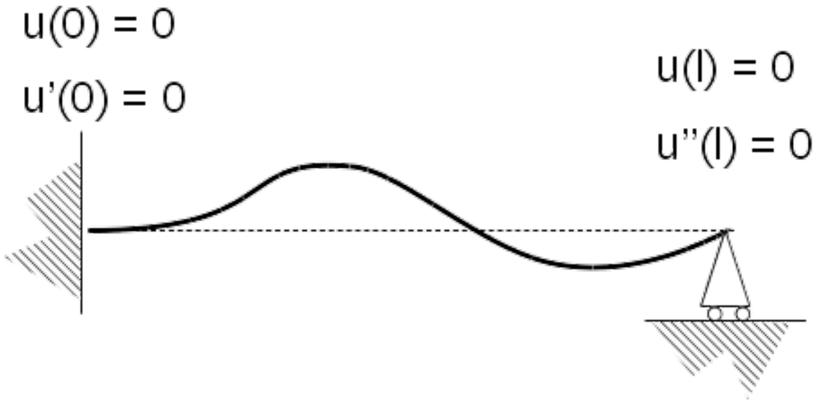
Para o segundo modo de uma viga engastada livre, temos deslocamento e primeira derivada nulas em uma extremidade e derivada segunda (momento fletor) e derivada terceira (cortante) nulos na outra, conforme mostrado na figura abaixo, usando a notação $u'(x) = du/dx$.



Para uma viga livre-livre, temos um primeiro modo com frequência natural nula que corresponde ao movimento de corpo livre. O próximo, que é o primeiro que interessa, tem, é claro, derivadas segunda e terceira nulas nas duas extremidades, conforme mostrado a seguir.



Finalmente, para o último caso temos o deslocamento e primeira derivada nulos em uma extremidade, e o deslocamento e a derivada segunda nulos na outra, conforme mostrado



Como esta questão é realmente muito fácil, vai ser corrigida correspondentemente.

Questão 3

Para uma barra em vibração axial, fixa em suas duas extremidades, os modos de vibração são dados, conforme a tabela fornecida no formulário, por $u(x,t) = C_n \cos(n\pi x)/lT(t)$, onde $T(t)$ é uma função **harmônica** do tempo.

É claro então que o deslocamento máximo em cada ponto é dado por $u(x) = C_n \cos(n\pi x)/l$, e a deformação específica correspondente é

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{n\pi}{l} C_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

onde o sinal negativo da derivada foi desprezado pois não importa já que vai varia de positivo para negativo conforme o deslocamento esteja para cima ou para baixo e além disto vamos elevar ao quadrado de qualquer jeito.

Foi dito no enunciado que a enegia elástica é proporcional ao quadrado da deformação específica, então temos que

$$U = \int_0^l C\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 C_n^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

onde C é uma constante arbitrária. Assim,

$$U = C\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 C_n^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l}\, dx = C\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 C_n^2 \frac{l}{2}.$$

Agora, da mesma tabela, vemos que

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

,

então

$$\frac{n\pi}{l} = \frac{\omega_n}{c}$$

,

o que leva a

$$U = C\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 C_n^2 \frac{l}{2}.$$

o que mostra que a energia total de deformação é proporcional ao quadrado da frequência natural, supodo que as amplitudes de vibração, dadas por C_n no caso, seja as mesmas. É por isto que é mais difícil excitar um modo normal com frequência natural alta, e é por isto que normalmente só nos preocupamos com ressonância nos primeiros modos normais.

```
In [ ]:
```