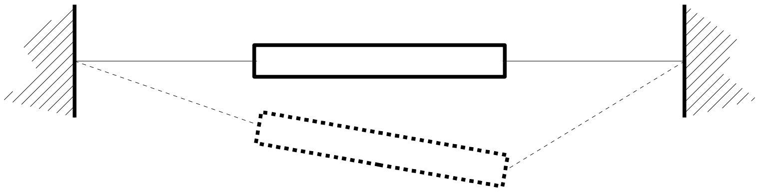
Vibrações Mecânicas **3º EE** **2º Semestre de 2017 Turma MM**

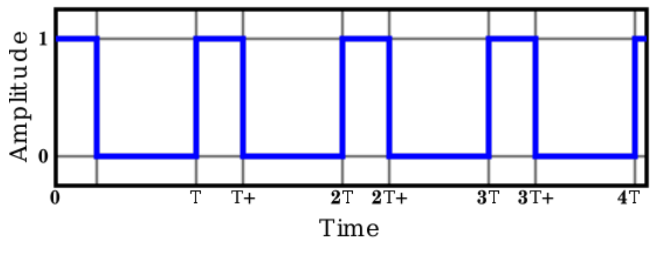
1) Considere que na figura abaixo, os fios pré-tensionados de forma que a força de tração nos fios é constante, igual a *T*, independente de qualquer movimento de pequena amplitude que possa ocorrer. O bloco de mass *M* e momento de inércia de massa (em relação ao CG) *J* e comprimento *b* pode mover-se na direção vertical e girar em torno do seu centro de gravidade, mas não pode deslocar-se horizontalmente. Determine as equações diferenciais de movimento tomando como coordenadas generalizadas o deslocamento vertical do centro de gravidade e a rotação do bloco em relação à horizontal, calcule as frequências naturais e faça um esquema dos modos normais de vibração. Qual o tipo de acoplamento existe entre as equações de movimento

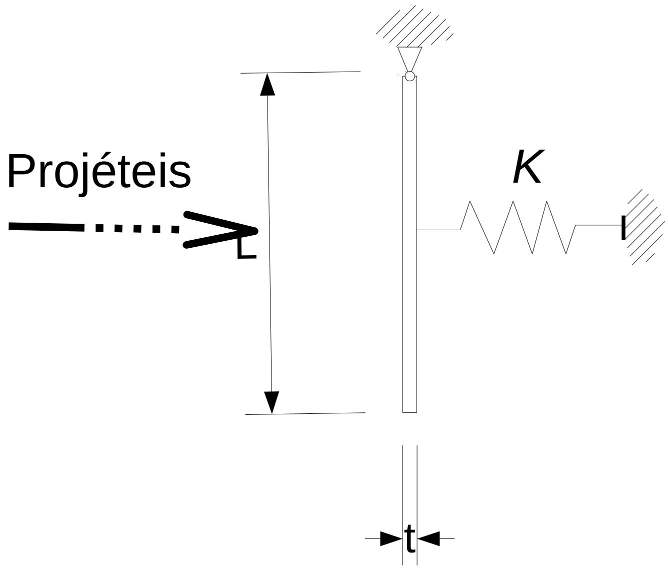


para as duas coordenadas? *(Valor 5.0 pontos).*

2) Uma placa basculante é usada como um anteparo balístico. A placa é atingida por 9 projéteis por segundo, no seu centro, na posição correspondente àquela onde a mola restauradora está fixada. O comprimento da placa, *L*, é 500 mm, sua espessura é igual a 4mm e a profundidade da placa (perpendicular ao plano mostrado) é igual a 200 mm. A placa é feita de aço com massa especifica igual a 7700 kg/m³. Através de uma simples análise de decaimento de amplitude, foi determinado que a razão de amortecimento do sistema é igual a 1%. A rigidez da mola é igual a 40 KN/m. Também foi determinado experimentalmente que o efeito do impacto de cada projétil equivale ao de uma força constante, que dura 20 ms, com magnitude igual a $m_p A$, onde m_p é a massa do projétil e *A* é uma constante determinada experimentalmente igual a $2{,}5\text{x}10^5$ m/s². Calcule a maior massa de projétil que pode ser testada neste sistema se o deslocamento máximo permitido para a extremidade inferior da placa é 10 mm. *(Valor 5 pontos.)*

Sabe-se que a série de Fourier para um trem de pulsos de amplitude unitária, com período *T* e duração τ é:





$$f(t)=\frac{\tau}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

Fórmulas no verso!

$\omega = 2\pi f$ $f = \frac{1}{\tau}$ $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2, \quad U = \frac{1}{2} \kappa x^2, \quad U = \frac{1}{2} F x$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}}, \quad \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n, \quad \zeta = \frac{c}{c_c}, \quad c_c = 2 m \omega_n$ $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$

$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \varphi), X = \frac{\sqrt{x_0^2 \omega_n^2 + \dot{x}_0{}^2 + 2 x_0 \dot{x}_0{}^2 \zeta \omega_n}}{\omega_d}, \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n, \varphi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{x_0 \omega_d}\right)$

$L[\ddot{x}(t)] = s^2 X(s) - s x(0) - \dot{x}(0)$ $L[\dot{x}(t)] = s X(s) - x(0)$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^n, \quad j = 1, 2, \ldots, n$

$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$ $H(i\omega) = \frac{1}{(1-r^2) + i 2\zeta r}, |H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$

$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/k}{\sqrt{(1-j^2 r^2)^2 + (2\zeta j r)^2}} \cos(j\omega t - \varphi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j/k}{\sqrt{(1-j^2 r^2)^2 + (2\zeta j r)^2}} \sin(j\omega t - \varphi_j)$

$\varphi_j = \arctan\left(\frac{2\zeta j r}{1 - j^2 r^2}\right)$ $x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau) \; d\tau$

$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right), \quad \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \delta = 2\pi\zeta \text{ para } \zeta \ll 1$ $Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}$ $\boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F_0}$

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1} \boldsymbol{F_0}$ $\boldsymbol{Z}(i\omega) = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$