2017.2-2? EE-MM

November 3, 2017

1 2017.2 2ž Exercício Escolar

```
In [1]: from math import pi, sqrt, atan2, log
```

1.1 Questão 1

Os dados do problema são: massa igual a 10 kg, rigidez igual a 4 KN/m e não há amortecimento. A frequência natural é então,

```
In [2]: m = 10 # kg
        k = 4000 # N/m
        wn = sqrt(k/m)
        f = wn/(2*pi)
        print((wn, f))

(20.0, 3.183098861837907)
```

A força aplicada tem magnitude igual a 15 N e frequência igual a 20 rad/s. Obviamente, esta força está em ressonância com o sistema, que não tem amortecimento, portanto o deslocamento da massa tende para infinito quando o tempo tende para infinito.

A resposta não vai para infinito imediatamente, é claro, como vimos em aula. A resposta em função do tempo é dada pela expressão fornecida no enunciado (corrigida durante a prova),

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\delta_{\text{st}} \omega_n t}{2} \sin \omega_n t.$$

No caso, as condições iniciais são nulas, portanto só o último termo resta na resposta.

Temos também que

```
In [3]: F0 = 15
        delta_st = F0 / k
        print(delta_st)

0.00375
```

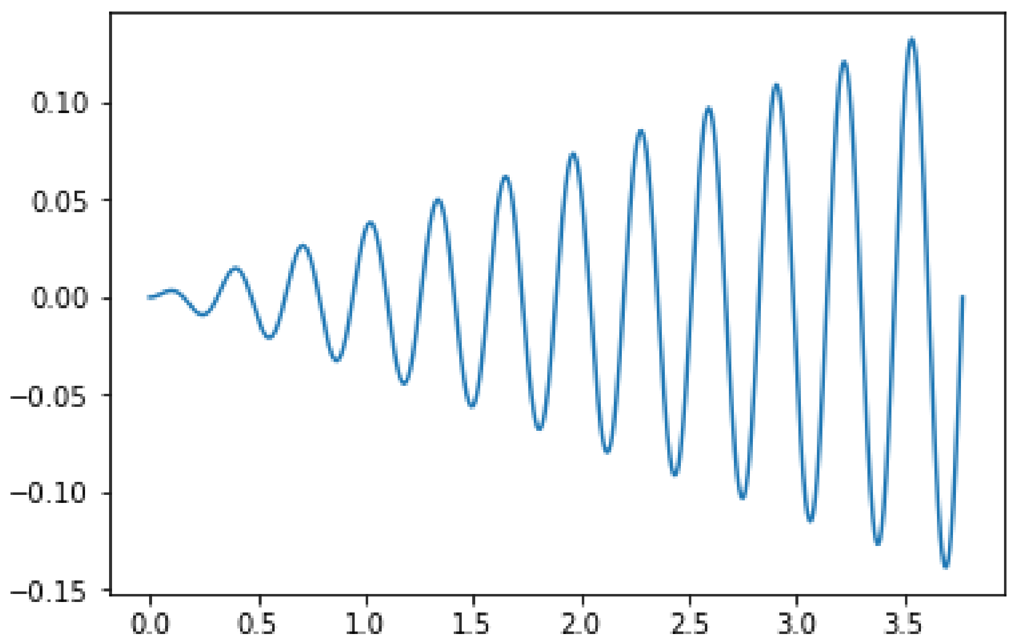
Vamos fazer um gráfico da solução. Não é estritamente necessário fazer isto na prova, mas ajuda a entender a solução e a resolver o problema corretamente.

```
In [4]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        %matplotlib inline

        taun = 2*pi/wn
        t = np.linspace(0, 12*taun, 1001)

        x = 0.5*delta_st*wn*t*np.sin(wn*t)
        plt.plot(t, x)
```

```
Out[4]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f37cfc108d0>]
```



Como as amplitudes crescem linearmente, é claro que, dentro de cada período, a maior amplitude é negativa, e ocorre para $3\tau_n/4$. No caso então, como queremos a maior amplitude (imediatamente, é claro, caso contrário a maior amplitude seria infinito pois ela cresce indefinidamente) após dez ciclos, ela vai ocorrer no tempo $10 + 3/4\tau_n$.

Outras interpretações para este enunciado são possíveis e eu vou considerar qualquer coisa que não seja ofensiva. No caso então,

```
In [5]: tmax = 10.75*taun
        Amax = 0.5*delta_st*wn*tmax*np.sin(wn*tmax)
        print(Amax)
```

```
-0.126645453848
```

Obviamente vamos considerar esta amplitude com valor positivo.

1.2 Questão 2

Podemos ver na figura abaixo o sistema a ser considerado neste problema. Claramente precisamos escolher uma coordenada generalizada adequada. Vamos tomar o deslocamento vertical da massa como esta coordenada, pois aí só precisamos calcular a rigidez equivalente da mola, e quando calcularmos o coeficiente de amortecimento, não precisamos transformá-lo para nada. É claro também que precisaremos trasformar a for

Obviamente vamos considerar apenas pequenos deslocamentos, de forma que o movimento da massa, que na verdade é um arco de círculo, pode ser considerado um deslocamento vertical.

O sistema é muito simples e o cálculo da rigidez equivalente é imediato. Supondo que a barra gire de um ângulo θ, o deslocamento na extremidade da mola, x_a é θa e na extremidade da barra, x_b, é θb. Considerando a mola equivalente em a e igualando as energias potenciais do sistema original e do sistema equivalente, temos,

$$\frac{1}{2}k_{\text{eq}}x_a^2 = \frac{1}{2}kx_b^2,$$

assim,

$$k_{\text{eq}} = \left(\frac{x_b}{x_a}\right)^2 k = \left(\frac{\theta b}{\theta a}\right)^2 k = \left(\frac{b}{a}\right)^2 k.$$

Podemos calcular o efeito da força na extremidade da mola simplesmente pelo equilíbrio de momentos, $F_a a = F_b b$, ou $F_a = b/aF_b$.

A frequência natural é $\omega_n = \sqrt{k_{\text{eq}}/m}$, assim,

```
In [6]: k = 2000 # N/m
        m = 1    # kg
        a = 0.1  # m
        b = 0.15 # m
        keq = k*(a/b)**2
        print(keq)
        wn = sqrt(keq/m)
        print(wn)
```

```
888.888888888889
29.8142396999972
```

Como $\zeta = c/c_c$, e $c_c = 2m\omega_n$, temos

```
In [7]: cc = 2*m*wn
        print(cc)
```

```
59.6284793999944
```

```
In [8]: zeta = 0.05
        c = zeta*cc
        print(c)
```

```
2.98142396999972
```

A frequência da força aplicada é 0,5Hz e a magnitude da força é 15 N. Assim,

```
In [9]: F0 = 15   # N
        f  = 0.5 # Hz
        w = 2*pi*f
        print(w)
```

```
3.141592653589793
```

A razão de frequências $r = \omega/\omega_n$,

```
In [10]: r = w / wn
         print(r)
```

```
0.10537222096561089
```

No formulário, temos a amplitude de vibração devido a uma força harmônica é $X = H(i\omega)\delta_{\text{st}}$, com $H(i\omega) = 1/(1 - r^2 + 2\zeta ri)$. Vamos calcular a reposta complexa em frequência é então.

```
In [11]: delta_st = F0/keq
         print(delta_st)
         Hiw = 1.0/(1.0 - r**2 + 2*zeta*r*1j)
         X = delta_st*Hiw
         print(X)
```

```
0.016874999999999998
(0.01706253474984965-0.00018181041466681154j)
```

A amplitude e a fase (em radianos) da resposta são então,

```
In [12]: print(abs(X))
```

```
0.017063503365859784
```

```
In [13]: import cmath
         print(cmath.phase(X))
```

```
-0.010655130486681052
```

1.2.1 Alternativamente

Para quem não quer trabalhar com números complexos diretamente, obviamente podemos calcular o módulo da resposta complexa em frequência como

$$|H(iw)| = \left|\frac{1}{1 - r^2 + 2\zeta ri}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},$$

com a fase dada por

$$-\tan\phi = \frac{2\zeta r}{1-r^2}.$$

Então,

```
In [14]: Hiwa = 1.0/sqrt((1-r**2)**2+(2*zeta*r)**2)
         Xa = delta_st * Hiwa
         phi = atan2(2*zeta*r, 1-r**2)
         print(Xa, -phi)
```

```
0.017063503365859784 -0.010655130486681052
```

1.3 Questão 3

Obviamente trata-se de um problema de excitação pela base, de forma que podemos aplicar diretamente o gráfico dado no formulário. Do enunciado, desejamos que a amplitude do bloco seja menor do que, aproximadamente, 10% da amplitude do piso.

Para usar o gráfico, precisamos da razão de amortecimento do sistema. Temos que a amplitde de vibração medida no segundo ciclo, em vibração livre amortecida, a partir de uma determinada condição inicial, é 74.3% da amplitude anterior, então, usando a fórmula para o decremento logarítmico, $\delta = \ln(x_1/x_2)$ e a relação entre o decremento logarítmico e a razão de amortecimento, $\delta = 2\pi\zeta$, temos,

```
In [15]: delta = log(1/0.743)
         print(delta)
```

```
0.2970592342643778
```

```
In [16]: zeta = delta/(2*pi)
         print(zeta)
```

```
0.047278445524269054
```

Então a razão de amortecimento é baixa, da ordem de 5%. Percebam como a amplitude cai muito rapidamente mesmo com uma razão de amortecimento relativamente baixa. Vamos usar a curva de 5% do gráfico.

Fica muito claro que, para isolamento de vibração, é **muito** melhor usar um gráfico log-log como o diagrama de Bode, que permitiria uma precisão muito maior na determinação destes valores. De qualquer forma, fazendo o possível com gráfico que é dado, podemos estimar que a razão de frequências deve ser algo em torno de 3,4.

Como $r = \omega/\omega_n$, e a frequência natural do sistema deve ser $\omega_n = \omega/r$. No caso então,

```
In [17]: f = 120    # Hz
         w = f/(2*pi)
         print(w)
```

```
19.098593171027442
```

```
In [18]: r = 3.40
         wn = w/r
         print(wn)
```

```
5.617233285596306
```

Como $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $k = \omega_n^2 m$. A rigidez da mola deve ser então

```
In [19]: m = 1500
         k = m*wn**2
         print(k)
```

```
47329.96467721661
```

Aproximadamente 47 KN/m portanto.

Não era necessário na prova, mas é interessante calcular a deflexão estática deste sistema, que é

```
In [20]: delta_st = 9.8*m/k
         print(delta_st)
```

```
0.3105854842751698
```

Lembrem-se que a unidade está em metros, portanto temos que ter uma deflexão estática de uns 300 mm aproximadamente, o que é muita coisa! Isolamento de vibração não é uma coisa simples, e normalmente técnicas mais sofisticadas são necessárias.

1.4 Questão 4

Vamos usar aqui um "gráfico" feito à mão, para ilustrar o que era esperado do aluno.

As coisas mais importantes a serem ressaltadas aqui são:

- A amplitude decai linearmente, enquanto que para o amortecimento viscoso ela decresce exponencialmente.
- O período é igual ao da vibração livre, e é maior do que o da vibração com amortecimento viscoso.
- A massa não retorna, em condições normais, para o repouso na posição $x = 0$.
- A amplitude cai de $4\mu N/k$ a cada ciclo.
- O movimento para em um tempo finito, enquanto que, pelo menos matematicamente, para o amortecimento viscoso a amplitude tende para zero quando o tempo tende para infinito.