2017.2-1?EE-MM

November 3, 2017

1 2017.2 1ž EE Turma MM

```
In [20]: from math import pi, sin, cos, tan, sqrt, atan2
         import numpy as np
         import matplotlib.pyplot as plt
         %matplotlib inline
```

1.1 Questão 1

Do espectro de frequência mostrados, temos que a frequência fundamental é 15 Hz, e que as frequências do segundo, terceiro, quarto e quinto harmônico, são, em Hz, respectivamente

```
In [21]: f = np.array([15, 30, 45, 60, 75], np.double)
```

Em radianos por segundo, as frequências são

```
In [22]: w = 2*pi*f
         print(w)

[  94.24777961  188.49555922  282.74333882  376.99111843  471.23889804]
```

Não termo constante, com frequência zero, portanto a função tem média nula.
Os ângulos de fase correspondentes são, em graus, diretamente do gráfico,

```
In [23]: phig = np.array([75, -22, 45, 30, -10], np.double)
```

E em radianos,

```
In [24]: phi = pi*phig/180.0

In [25]: print(phi)

[ 1.30899694 -0.38397244  0.78539816  0.52359878 -0.17453293]
```

As amplitudes dos harmônicos são também tiradas diretamente do gráfico, e são, aproximadamente,

In [26]:
```python
A = np.array([1.3, 2.4, 2.0, 0.75, 0.5])
```

A série de Fourier de uma função com média zero é dada por

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t - \phi_n),$$

então

$F(t) = 1.3\cos(94.2t - 1.31) + 2.4\cos(186t + 0.39) + 2.0\cos(282t - 0.784) + 0.75\cos(377t - 0.523) + 0.5\cos(471t + ($

Só por curiosidade, vamos ver qual é a cara disto. Obviamente não era necessário fazer o gráfico na prova!

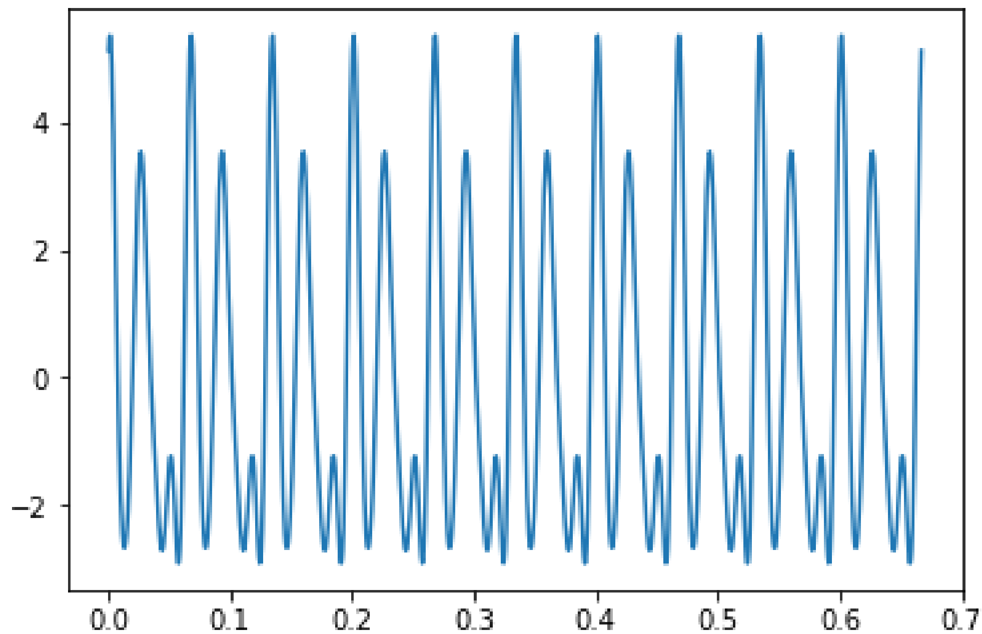
In [27]:
```python
# Don't worry about this.
class Series():
    def __init__(self, A, w, phi):
        self.A = A
        self.w = w
        self.phi = phi

    def __call__(self, t):
        y = np.zeros_like(t)
        for A, w, phi in zip(self.A, self.w, self.phi):
            y += A*np.cos(w*t - phi)
        return y


s = Series(A, w, phi)
tau = 2*pi/w[0]
tf = 10*tau
t = np.linspace(0, tf, 1001)
y = s(t)
print(y)
plt.plot(t, y)
```

```
[ 5.1178425   5.32766696  5.35561209 ...,  4.1875606   4.73248597
  5.1178425 ]
```

Out[27]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f4345aa7c18>]
```



Honestamente, eu não fazia ideia do que esperar, vou acreditar que está certo.

1.2 Questão 2

Temos os fasores $X_1 = 15e^{-i33.3t}$ e $X_2 = 22e^{-i33.3t-\pi/4}$. Como os dois tem a mesma frequência, a soma é um fasor de mesma frequència, e podemos tomar qualquer um deles como referência. Fica mais fácil desenhar uma figura se tomarmos o fasor atrasado de $\pi/4$ radianos como referência.

Podemos ver os fasores representados na figura abaixo.

Da figura, é claro que

$$(X_1 + X_2)^2 = (X_1 \cos\phi + X_2)^2 + X_1 \sin\phi^2$$

e

$$\alpha = \arctan\left(\frac{X_1 \sin\phi}{X_1 \cos\phi + X_2}\right).$$

Esqueci de colocar na figura que α é o ângulo que a soma $X_1 + X_2$ faz com o vetor X_2.

No caso, temos, $X_1 = 15$, $X_2 = 22$ e $\phi = \pi/4$. Basta apenas fazer as contas.

```
In [28]: X1 = 15.0
         X2 = 22.0
         phi = pi/4.0

         X = sqrt((X1*cos(phi)+ X2)**2 + (X1*sin(phi)**2))
         alpha = atan2(X1*sin(phi), X1*cos(phi)+X2)
         print(X, alpha)
```

```
32.721406992718414 0.314494178597881
```

A diferença de fase entre X e X_1 é, obviamente, $\pi/4 - \alpha$, portanto,

```
In [29]: d = pi/4 -alpha
         print(d)
```

```
0.4709039847995673
```

O fasor resultante é portanto $X = 32.72e^{i33.3t-0.471}$, onde a fase é medida em relação ao fasor X_1.

Neste problema é claro que a frequência não influencia nada!

2 Questão 3

Se o deslocamento é $x(t) = 10e^{-i0.80t}$, e a velocidade é $\dot{x}(t) = -8ie^{-i0.80t}$ e a aceleração é $\ddot{x}(t) = -6.4e^{-i0.80t}$. Estes fasores podem ser representados graficamente como na figura abaixo.

Nesta figura, os fasores estão girando no sentido horário, já que a velocidade angular é negativa, o deslocamento é dado pela seta roxa, a velocidade pela seta vermelha e a aceleração pela seta verde.

3 Questão 4

Para um oscilador harmônico, a energia cinética e potencial são, respectivamente, $T = 1/2m\dot{x}^2$ e $U = 1/2kx^2$. A resposta é $x(t) = X\cos(\omega_n t - \phi)$, e a velocidade correspondente é $\dot{x}(t) = -\omega_n X \sin(\omega_n t - \phi)$. Claramente, as expressões para as energias cinéticas e potencial são, respectivamente,

$$T = \frac{1}{2}m(-\omega_n X \sin(\omega_n t - \phi)^2 = \frac{1}{2}m\omega_n^2 \sin^2(\omega_n t - \phi)$$

e

$$U = \frac{1}{2}k(X\cos(\omega_n t - \phi)^2 = \frac{1}{2}k\cos^2(\omega_n t - \phi).$$

Somando estas duas expressões, temos

$$T + U = \frac{1}{2}\left[m\omega_n^2 \sin^2(\omega_n t - \phi) + k\cos^2(\omega_n t - \phi)\right].$$

Para que esta expressão seja um valor constante, claramente não podem haver valores dependentes do tempo, então temos que colocar em evidência os termos em $\sin^2$ e $\cos^2$. Colocando k em evidência,

$$T + U = \frac{1}{2}k\left[\frac{m\omega_n^2}{k}\sin^2(\omega_n t - \phi) + \cos^2(\omega_n t - \phi)\right].$$

Obviamente se

$$\frac{m\omega_n^2}{k} = 1$$

o termo entre colchetes se reduz para 1, e a energia total é

$$T + U = \frac{1}{2}k.$$

A condição é, obviamente,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

4 Questão 5

Claramente a maneira mais fácil de calcular a massa equivalente neste problema é através da equivalência de energias cinéticas entre as coordenadas generalizadas X e θ.

A energia cinética do pistão é, claramente, $T_p = 1/2M\dot{X}^2$. Queremos uma massa equivalente na coordenada generalizada θ. Obviamente, como esta é uma coordenada de rotação, a massa equivalente deve ser um momento de inércia de massa, de forma que $T_{\text{eq}} = 1/2J_{\text{eq}}\dot{\theta}^2$.

Igualando as duas expressões, temos que $J_{\text{eq}}\dot{\theta}^2 = M\dot{X}^2$, ou $J_{\text{eq}} = M(\dot{X}/\dot{\theta})^2$. Claramente, o termo dentro do parênteses ao quadrado é o coeficiente cinemático, $k_x = \dot{X}/\dot{\theta} = -X\tan\varphi$.

É claro então que $J_{\text{eq}} = Mk_x^2$. No caso, para a configuração dada, temos

```
In [30]: X = 0.2978
         M = 0.25
         phi = 30*pi/180
         kx = - X * tan(phi)
         print(kx)
         Jeq = M * kx**2
         print(Jeq)
```

```
-0.17193491016467055
0.007390403333333333
```

5 Questão 6

A maneira mais fácil de encontrar as equações de movimento deste sistema é, na minha opinião, através da conservação de energia.

A energia potencial do sistema está concentrada na mola, e é, $U = 1/2kx_v^2$. O resto do sistema apenas acumula energia cinética. Temos a energia cinética da vareta

$$T_p = \frac{1}{2}m_p\dot{x}_p^2,$$

a energia cinética do balancim

$$T_r = \frac{1}{2}J_r\dot{\theta}_r^2,$$

e a energia cinética da válvula

$$T_v = \frac{1}{2}m_v\dot{x}_v^2.$$

Não está completamente enunciado na prova se o momento de inércia do balancim, J_r, refere-se ao centro de gravidade, marcado por G, ou ao pivô, marcador por O. Para ilustrar o processo, vamos considerar que o momento J_r refere-se ao centro de gravidade, então usamos o teorema dos eixos paralelos para transformá-lo para o pivô. O teorema dos eixos paralelos aplicado a este caso torna-se

$$J_O = J_G + m_r l_3^2,$$

onde m_r é a massa do balacim, que também não é dada!

A questão também será considerada correta se for considerado o momento de inércia como dado em relação ao pivô. A energia cinética seria dada então por

$$T_r = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2.$$

Só a mola armazena energia potencial neste sistema, de forma que a energia potencial é data por

$$U_s = \frac{1}{2} k x_m^2.$$

Claramente, o deslocamento da extremidade da mola é igual ao deslocamento da válvula x_v, portanto podemos resscrever a expressão para a energia potencial como

$$T_v = \frac{1}{2} k x_v^2.$$

É claro que é necessário que todas as expressões para a energia sejam fornecidas em termos da mesma coordenada generalizada, e, pelo enunciado, vamos adotá-la como a rotação do balancim, θ_r. Consirenado pequenas rotações, como sempre, as coordenadas são dadas por $x_p = \theta_r l_1$ e $x_v = \theta_r l_2$.

As expressões para a energia cinética tornam-se então

$$T_p = \frac{1}{2} m_p \dot{\theta}_r^2 l_1^2, \quad T_r = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_r^2, \quad T_v = \frac{1}{2} m_v \dot{\theta}_r^2 l_2^2.$$

A expressão para a energia potencial é

$$U_s = \frac{1}{2} k \theta_r^2 l_2^2.$$

A energia cinética total é então

$$T = \frac{1}{2} \left(m_p l_1^2 + J_r + m_v l_2^2 \right) \dot{\theta}_r^2.$$

A energia total do sistema é, isto é

$$T + U_s = \frac{1}{2} \left\{ \left(m_p l_1^2 + J_r + m_v l_2^2 \right) \dot{\theta}_r^2 + k \theta_r^2 l_2^2 \right\}.$$

Como a energia mecânica total é conservada,

$$\frac{d}{dt}(T + U_s) = 0,$$

e, aplicando a derivara à expressão acima, e igualando a zero, temos,

$$2 \left(m_p l_1^2 + J_r + m_v l_2^2 \right) \dot{\theta}_r \ddot{\theta}_r + 2k \theta_r \dot{\theta}_r l_2^2 = 0,$$

obviamente podemos eliminar $2\dot{\theta}_r$ desta equação, e ficamos com a forma final da equação de movimento que é

$$\left(m_p l_1^2 + J_r + m_v l_2^2 \right) \ddot{\theta}_r + k l_2^2 \theta_r = 0.$$

Obviamente, a massa equivalente é $J_{\text{eq}} = m_p l_1^2 + J_r + m_v l_2^2$ e a rigidez equivalente é $k_{\text{eq}} = k l_2^2$.

5.1 Questão 7

Do enunciado temos que

```
In [31]: k = 4000 # N/m
         m = 5    # kg
```

Assim, a frequência natural é

```
In [32]: wn = sqrt(k/m)
         print(wn)
```

```
28.284271247461902
```

O sitema é colocado em movimento a partir das condições iniciais

```
In [33]: x0 = -0.012
         v0 = 0.2
```

Como temos um sistema em vibração livre não amortecida, a resposta é $x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$, com $A = \left(x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e $\tan(\phi) = \dot{x}_0/(x_0\omega_n)$. Calculando estes valores, temos

```
In [34]: A = sqrt(x0**2 + (v0/wn)**2)
         phi = atan2(v0, x0*wn)
         print(A, phi, phi*180/pi)
```

```
0.013928388277184 2.609110870019038 149.49104113379718
```

A fase é quase 150 graus, portanto o deslocamento está quase fora de fase em relação ao cosseno, faltando apenas uns 30 graus para esta situação. O primeiro deslocamento máximo ocorre no primeiro máximo positivo, que ocorre, é claro, no tempo que corresponde ao atrado do ângulo de fase. Assim,

```
In [35]: tmax = phi/wn
         print(tmax)
```

```
0.09224599945289973
```

Como a resposta é harmônica, o amplitude da velocidade é $\omega_n A$, portanto, (em metros por segundo)

```
In [36]: vmax = A * wn
         print(vmax)
```

```
0.3939543120718442
```

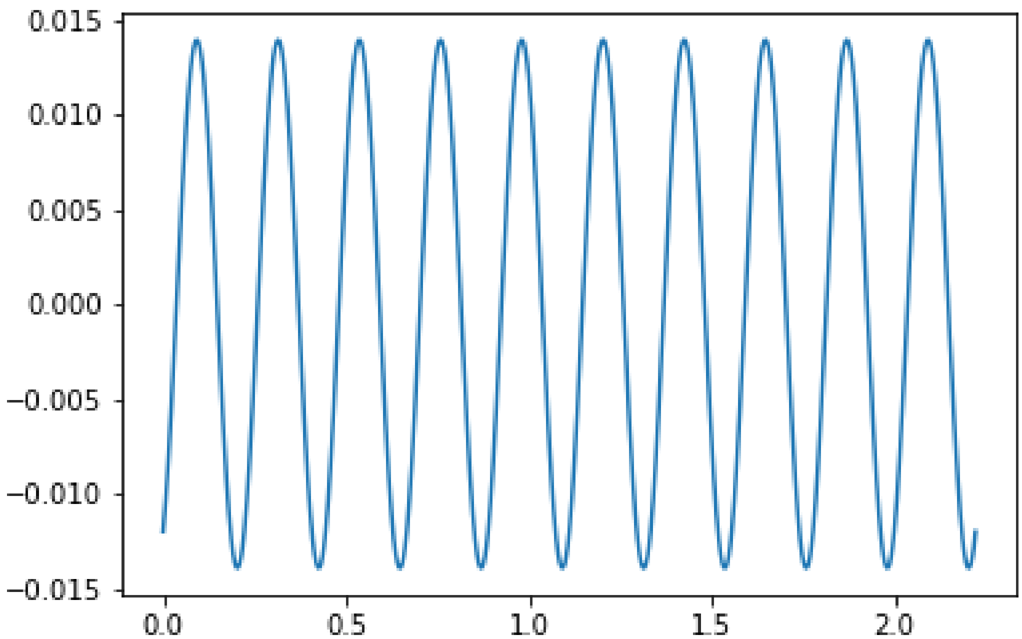
Este final não é necessário na solução, é claro, mas para ilustração, vamos plotar a solução. Vamos plotar uns dez períodos para ter um gráfico decente.

```
In [37]: taun = 2*pi/wn
         print(taun)
```

```
0.22214414690791828
```

```
In [38]: t = np.linspace(0, 10*taun, 1001)
         x = A*np.cos(wn*t - phi)
         plt.plot(t, x)
```

```
Out[38]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f4345a38550>]
```




```
In [ ]:
```