2017.2 1º EE Turma MC

Questão 1

Vamos chamar a massa do projétil de m e a massa do bloco que está parado de M. Pela conservação de momento linear, temos que $mv_m = (M+m)v_M$, poranto a velocidade da massa após o impacto é $v_M = mv_m/(M+m)$. Como a massa m é muito pequena em relação à M, podemos desprezá-la sem cometer nenhuma atrocidade, mas também podemos incluí-la, já que a conta é trivial. Qualquer escolha é razoável, mas, desprezar a massa menor seria uma coisa mais "de engenheiro".

In [4]:
```
m = 0.020 # kg
M = 1.0   #kg
vm = 200  # m/s
v0 = m*vm/(M+m)
print(v0)
```

```
3.9215686274509802
```

Esta é a velocidade inicial de um oscilador harmônico não amortecido. O deslocamento deste sistema é dado por (do formulário)

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi), \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \tan(\phi) = \frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n}.$$

No caso, o deslocamento inicial é nulo e a velocidade inicial é aquela determinada acima. A amplitude e a fase são então, $A = \dot{x}_0/\omega_n$ e $\tan(\phi) \to \infty$. Claramente, $\phi = \pi/2$. e como $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin(\alpha)$, a resposta é $x(t) = \dot{x}_0/\omega_n \sin(\omega_n t)$.

No caso, temos,

In [7]:
```
from math import sqrt

k = 2000   # N/m
wn = sqrt(k/(M+m))
print(wn)
```

```
44.280744277004764
```

In [8]:
```
A = v0/wn
print(A)
```

```
0.08856148855400953
```

O movimento do bloco é dado então por $x(t) = 0.9886\cos(44.2t)$.

Como o movimento é harmônico, a velocidade é dada por $\dot{x}(t) = \omega_n A \sin(\omega_n t)$, portanto a velocidade máxima é $A\omega_n$. No caso, então

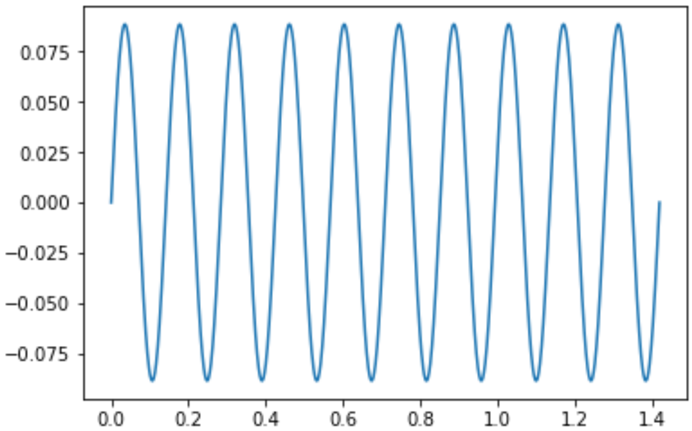
In [9]:
```
vmax = A*wn
print(vmax)
```

```
3.9215686274509802
```

Que, obviamente, é a velocidade inicial, já que o sistema não tem amortecimento e toda a energia do movimento da massa pequena é transferida para a massa maior. Só para ilustração, vamos fazer um gráfico da resposta.

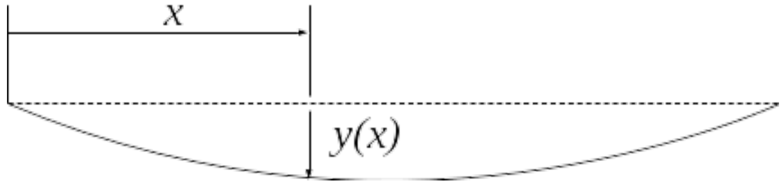
In [11]:
```
from math import pi, sin, cos, tan, sqrt, atan2
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

taun = 2*pi/wn
t = np.linspace(0, 10*taun, 1001)

x = A*np.sin(wn*t)
plt.plot(t, x)
```

Out[11]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f183a29d4e0>]
```



Questão 2

Vamos supor que o deslocamento lateral da viga quando deformada seja dado por $y(x) = 4y_m x(l - x)$, onde y_m e a flecha máxima, como esquematizado na figura abaixo.



Podemos calcular a massa equivalente da viga usando a equivalência de energias cinéticas. A massa de um elemento infinitesimal da viga na posição x, com comprimento dx, é $dm = \rho A dx$, onde A é a área da seção transversal da viga e ρ a densidade do material. Obviamente, estamos considerando a viga homogênea.

A energia cinética deste elemento de viga é dada por $dT = 1/2\, dm \dot{y}(x)^2$. A enegia cinética total da viga é, claramente, a integral destes valores ao longo da viga.

A hipótese básica que fazemos neste tipo de problema, e que depois será justificada no fim do curso, é que todos os pontos da viga se movem em fase e com a mesma frequência, em movimento harmônico. Assim, o movimento de toda a viga ao longo do tempo é dado por $y(x,t) = 4y_m x(l - x)\sin(\omega t)$.

A velocidade ao longo da viga é a derivada desta expressão ao longo do tempo, $\dot{y}(x,t) = \omega 4 y_m x(l - x)\cos(\omega t)$. A velocidade máxima ao lngo da viga é, claramente, $\dot{y}(x)_{\max} = \omega 4 y_m x(l - x)$. A energia cinética máxima do elemento de viga é $dT = 1/2\, dm\, (\omega 4 y_m x(l - x))^2$. Expandindo esta expressão,

$$dT = \frac{1}{2} 16 y_m^2 \omega^2 x^2 \left(l^2 - 2lx + x^2\right) \rho A dx = \frac{1}{2} 16 y_m^2 \omega^2 \left(l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4\right) \rho A dx.$$

A energia cinética total é

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l 16 y_m^2 \omega^2 \left(l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4\right) \rho A dx = \frac{1}{2} 16 y_m^2 \omega^2 \rho A \left[\frac{l^2 x^3}{3} - \frac{2lx^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^l$$

ou

$$T = \frac{1}{2} 16 y_m^2 \omega^2 \rho A \left[\frac{l^5}{3} - \frac{2l^5}{4} + \frac{l^5}{5}\right] = \frac{1}{2} 16 y_m^2 \omega^2 \rho A \frac{l^5}{30} = \frac{1}{2}\frac{8}{15} y_m^2 \rho A l^5 \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{8}{15} y_m^2 m_v l^4 \omega$$

onde m_v é a massa da viga. Uma massa concentrada no centro da viga, em movimento harmônico, teria a energia cinética igual a

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2}\, m_{\text{eq}} y_m^2 \omega^2.$$

Igualando as duas expressões,

$$\frac{1}{2}\, m_{\text{eq}} y_m^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{8}{15} y_m^2 m_v l^4 \omega^2,$$

simplificando, temos,

$$m_{\text{eq}} = \frac{8}{15} m_v l^4.$$

Questão 3

Por incrível que pareça o sistema tem apenas um grau de liberdade. Como sempre, vamos considerar apenas pequenas rotações. Uma maneira confortável de calcular a frequência natural para um problema como este é igualando a energia cinética máxima com a energia potencial máxima. Infelizmente para resolver este problema corretamente usando um método baseado em energia, você precisa saber que a expansão em série de $\cos\theta$ é $1-1/2\theta^2-\ldots$, ou que a expansão em série de $\sqrt{1-x^2}$ é $1-x^2/2-\ldots$.

Como eu não esperaria que alguém soubesse isto de cabeça, vamos fazer por um método mais convencional primeiro, depois fazemos por energia.

A frequência natural vai ser calculada então então como $\omega_n=\sqrt{k_{\text{eq}}/J_{\text{eq}}}$, onde k_{eq} e J_{eq} são a rigidez equivalente em torção e o momento de inércia equivalente. Escrevi em termos de grandezas rotativas pois vou tomar como coodernada generalizada a rotação da engrenagem 2.

Vamos denominar as rotações de cada engrenagem com θ_1, θ_2 e θ_3. Vamos escolher como coordenada generalizada para descrever o sistema a rotação da engrenagem 2.

As rotações das engrenagens 1 e 2 são obviamente relacionadas pelo engrenamento, $\theta_1 r_1=\theta_2 r_2$, assim $\theta_1=\theta_2 r_2/r_1$.

A engrenagem 3 tem o mesmo ângulo de rotação que a engrenagem 2, no entanto, uma rotação da engrenagem 2 também causa uma **translação** do centro de gravidade da engrenagem 3 igual a $l_2\theta_2$. Isto é importante pois a engrenagem 3 tem energia cinética de translação e rotação.

O deslocamento da extremidade da mola 1 é dado por $\theta_1 l_1=\theta_2 r_2 l_1/r_1$.

Pela equivalência de energia cinéticas, o momento equivalente da engrenagem 1 considerada em relação à engrenagem 2 pode ser calculado por

$$\frac{1}{2}J_{1_{\text{eq}}}\dot{\theta}_2^2=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2,$$

mas, devido ao engrenamento, $\dot{\theta}_1=\dot{\theta}_2 r_2/r_1$, portanto

$$\frac{1}{2}J_{1_{\text{eq}}}\dot{\theta}_2^2=\frac{1}{2}J_1(\dot{\theta}_2 r_2/r_1)^2,$$

assim, claramente,

$$J_{1_{\text{eq}}}=J_1(r_2/r_1)^2.$$

Podemos calcular o momento de inércia equivalente da engrenagem 3 no eixo da engrenagem 2, podemos usar o teorema dos eixos paralelos, ou usando novamente a equivalência de energia cinética. Vamos fazer do segundo modo para ilustrar o processo.

$$\frac{1}{2}J_{3_{\text{eq}}}\dot{\theta}_2^2=\frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}m_3 l_2^2\dot{\theta}_2^2,$$

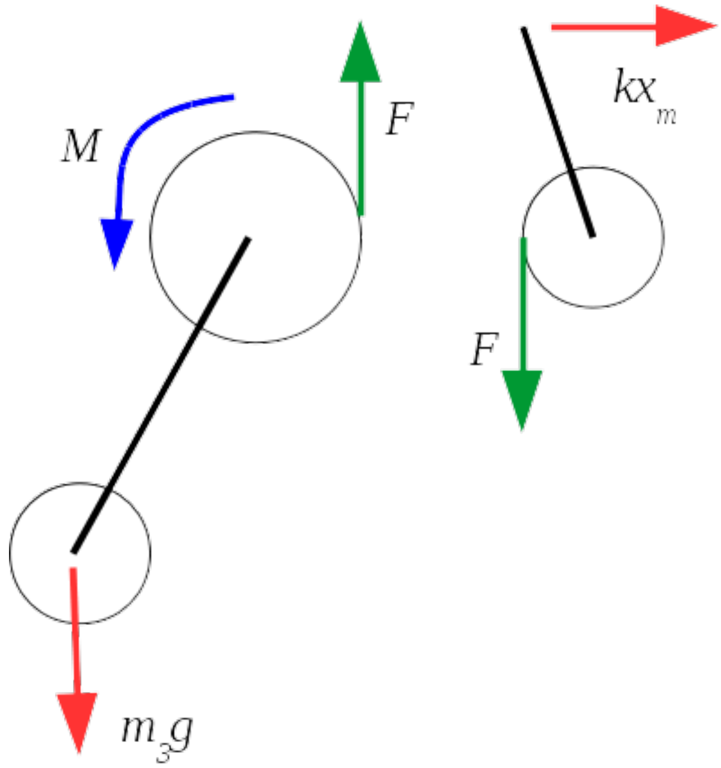
onde o segundo termo vem da energia cinética de translação da massa 3 estamos já usando o fato de que o ângulo de rotação da massa 3 é igual ao da massa 2. Assim,

$$J_{3_{\text{eq}}}=J_3+m_3 l_2^2,$$

que é, obviamente, o teorema dos eixos paralelos.

O momento de inércia total é então $J_{\text{eq}}=J_{1_{\text{eq}}}+J_2+J_{3_{\text{eq}}}=J_1(r_2/r_1)^2+J_2+J_3+m_3 l_2^2$.

Para calcular a rigidez equivalente, vamos calcular o momento estático que deve ser aplicado à engrenagem 2 para manter a engrenagem 2 em um ângulo θ_2. Vamos fazer os diagramas de corpo livre dos subsistemas de interesse.



Fazendo o somatório de momentos em relação ao centro da engrenagem 2,

$$M = k_{\text{eq}}\theta_2 = m_3 g l_2 \sin\theta_2 + F r_2$$

e para a engrenagem 1,

$$F r_2 = k x_m = k\theta_1 l_1 = k\theta_2 r_2 l_1 / r_1 .$$

A força de interface é então

$$F = k\theta_2 l_1 / r_1 .$$

Substituindo na expressão para o momento da engrenagem 2,

$$k_{\text{eq}}\theta_2 = m_3 g l_2 \sin\theta_2 + k\theta_2 l_1 r_2 / r_1 .$$

Para pequenos ângulos, $\sin\theta_2 = \theta_2$, e, elimando este ângulo da fórmula acima, ficamos com,

$$k_{\text{eq}} = m_3 g l_2 + k l_1 r_2 / r_1 .$$

Podemos então calcular tudo agora.

In [14]:
```
h = 0.010  # m
rho = 7700 # kg/m³
r1 = 0.075 # m
r2 = 0.100 # m
r3 = 0.090 # m
k = 3500.0 # N/m

A1 = pi*r1**2
A2 = pi*r2**2
A3 = pi*r3**2
print((A1, A2, A3))

m1 = rho*A1*h
m2 = rho*A2*h
m3 = rho*A3*h
print((m1, m2, m3))

J1 = 0.5*m1*r1**2
J2 = 0.5*m1*r2**2
J3 = 0.5*m1*r3**2
print((J1, J2, J3))
```

```
(0.017671458676442587, 0.031415926535897934, 0.025446900494077322)
(1.3607023180860793, 2.4190263432641412, 1.9594113380439537)
(0.003826975269617098, 0.006803511590430398, 0.005510844388248621)
```

In [15]:
```
J1eq = J1*(r2/r1)**2
print(J1eq)
```

```
0.006803511590430398
```

In [16]:
```
l2 = 3.0*r2
J3eq = J3+m3*l2**2
print(J3eq)
```

```
0.1818578648122045
```

In [18]:
```
Jeq = J1eq + J2 + J3eq
print(Jeq)
```

```
0.1954648879930653
```

A riidez equivalente em torção é

In [20]:
```
l1 = 2.0*r1
g = 9.8
keq = m*g*l2 + k*l1*r2/r1
print(keq)
```

```
700.0588
```

A frequência natural é então

In [22]:
```
wn = sqrt(keq/Jeq)
print(wn)
```

```
59.845690483933794
```