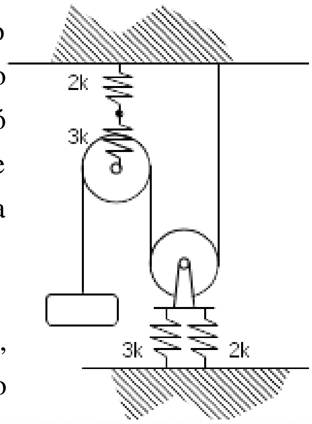
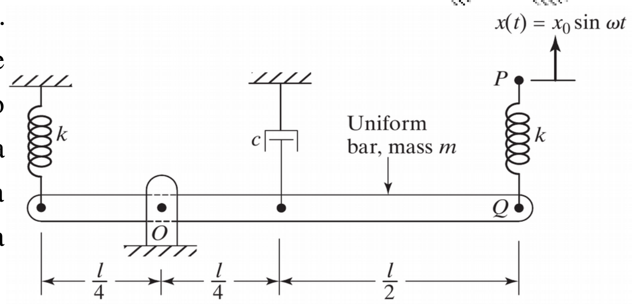
Vibrações Mecânicas **Exame Final** **2º Semestre de 2017**

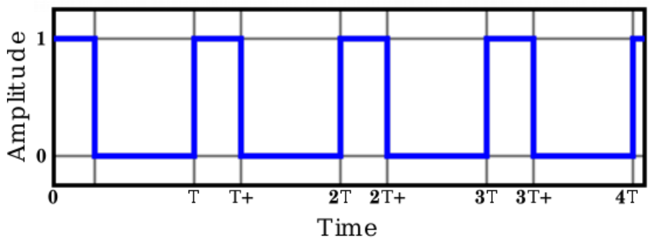
1) Encontre a frequência natural do sistema mostrado na figura ao lado, sabendo que as roldanas não tem atrito, mas tem massa *m* e raio *R*, e que a massa do bloco pendurado na extremidade do cabo é 2*m*. Considere que todos os corpos sólidos só podem se mover na vertical, e que o fio é inextensível. Preste atenção e considere toda a energia cinética do sistema. O momento de inércia de um cilindro de massa *M* e raio *R* é ½ *MR*². *(Valor 2,5 pontos).*



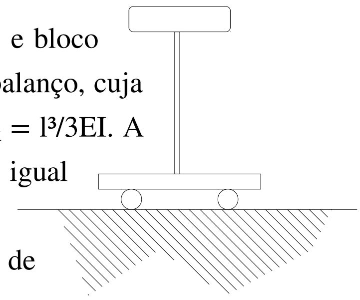
2) Na figura mostrada ao lado, a barra uniforme tem massa igual a 12 kg, comprimento total igual a 1,2 m, a rigidez da mola é igual a 1150 kN/m, e o coeficiente de amortecimento é igual a 500 Ns/m. Suponha que o deslocamento prescrito na extremidade da mola seja da forma de um trem de pulsos, como mostrado na figura abaixo, cuja série de Fourier, para uma amplitude unitária, é dada a seguir. Suponha que a frequência dos pulsos seja exatamente a frequência natural do sistema, e que a sua duração seja 10% do período do pulso. Qual a maior amplitude dos pulsos para que o deslocamento na extremidade da barra não seja maior do que 10 mm? *(Valor 2.5 pontos.)*

$$f(t)=\frac{\tau}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

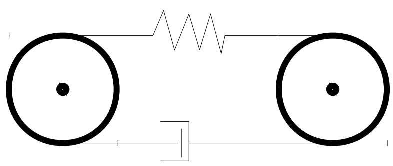




3) Na figura mostrada ao lado, a massa equivalente total da base móvel é 1 kg, e bloco superior é 0,75 kg. A haste vertical é flexível, funcionando como uma viga em balanço, cuja deflexão máxima para uma carga na extremidade para uma carga unitária é $y_{max} = l^3/3EI$. A barra é feita de aço, com seção quadrada de lado igual a 5 mm e comprimento igual 0,50 m. Quantos graus de liberdade tem o sistema e quais são as frequências naturais? Faça também um esquema dos modos normais. O momento de inércia de uma seção quadrada de lado l é $l^4/12$. *(Valor 2,5 pontos.)*



4) Na figura ao lado, ambos os discos estão montados em rolamentos sem atrito nos seus centros, tem massa igual a 1 kg e raio igual a 450 mm. A rigidez da mola é igual a 4 kN/m, e o coeficiente de amortecimento do amortecedor é 18 Ns/m. Se o disco da esquerda está submetido a um momento harmônico de amplitude 20Nm e frequência igual a 20 Hz, qual é a resposta no regime permanente do disco à direita? *(Valor 2,5 pontos.)*



Fórmulas no verso!

$\omega=2\pi f$ $f=\frac{1}{\tau}$ $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,\quad T=\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2,\quad U=\frac{1}{2}\kappa x^2,\quad U=\frac{1}{2}F x$ $k_t=\frac{GJ}{L}$

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k_t}{J_0}},\quad \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\quad \zeta=\frac{c}{c_c},\quad c_c=2m\omega_n$ $\delta_{st}=\frac{F_0}{k}$

$$x(t)=X e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi),\ X=\frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2+\dot{x}_0^{\ 2}+2x_0\dot{x}_0^{\ 2}\zeta\omega_n}}{\omega_d},\ \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\ \varphi=\arctan\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{x_0\omega_d}\right)$$

$x(t)=(C_1+C_2 t)e^{-\omega_n t},\quad C_1=x_0,\quad C_2=\dot{x}_0+\omega_n x_0$ $\beta=\frac{h}{k}$ $\delta=\pi\beta$

$$x(t)=C_1 e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}\omega_n t+C_2 e^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}\omega_n t,\quad C_1=\frac{x_0\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})+\dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}},\quad C_2=\frac{-x_0\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})-\dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$\delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right),\quad \delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},\quad \delta=2\pi\zeta \text{ para } \zeta\ll 1$ $\Delta W=\pi\omega c X^2$ $\Delta W=\pi h X^2$

$$x_p(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2+(2\zeta j r)^2}}\cos(j\omega t-\varphi_j)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2+(2\zeta j r)^2}}\sin(j\omega t-\varphi_j)$$

$T_d=\frac{X}{Y}=\left(\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ $\frac{Mx}{me}=r^2|H(i\omega)|,\ \varphi=\arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$

$c=\sqrt{\frac{P}{\rho}}\quad c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\quad c=\sqrt{\frac{G}{\rho}}\quad c=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\quad \alpha\tan\alpha=\beta\quad \alpha=\frac{\omega l}{c}\quad \beta=\frac{m}{M}$ $\omega=2\pi f$ $f=\frac{1}{\tau}$

$L[\ddot{x}(t)]=s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)$ $L[\dot{x}(t)]=sX(s)-x(0)$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial q_j}=Q_j^n,\quad j=1,2,\ldots,n$

$Z_{rs}(i\omega)=-\omega^2 m_{rs}+i\omega c_{rs}+k_{rs}$ $\boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F_0}$ $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1}\boldsymbol{F_0}$ $\boldsymbol{Z}(i\omega)=\begin{bmatrix}Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega)\\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega)\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ $\delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right),\quad \delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},\quad \delta=2\pi\zeta \text{ para } \zeta\ll 1$

$H(i\omega)=\frac{1}{(1-r^2)+i2\zeta r},\ |H(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$