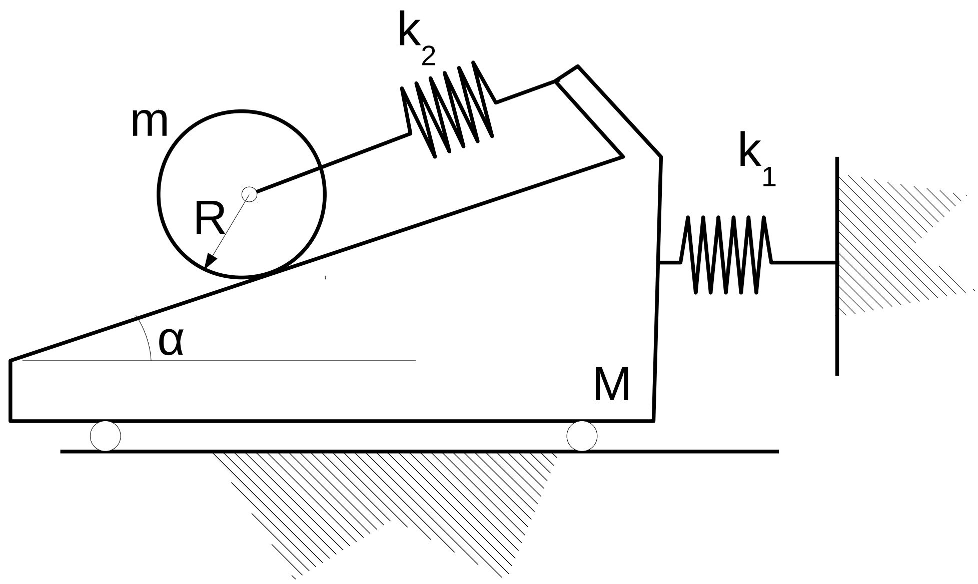
1) Considere uma barra de aço, cuja massa específica é 7700 kg/m³ e módulo de Young igual a 210 GPa, com seção retangular com base igual a 15 mm e altura igual a 20 mm e comprimento igual a 1500 mm, engastada em uma extremidade e livre na outra. Compare as frequências naturais calculadas de forma aproximada com o valor da frequência fundamental exata. Calcule as frequências naturais da seguinte forma: a) considerando a massa da barra concentrada em sua extremidade, e a barra como uma mola linear; b) calculando a massa equivalente da barra considerando que o seu deslocamento dinâmico corresponde ao deslocamento estático causado por uma carga estática na extremidade da viga. O momento de inércia de área de uma seção retangular é $I = bh^3/12$, onde b e h são a base e a altura da seção, respectivamente. Para uma viga simplesmente engastada de comprimento L, a deflexão lateral é dada por $y(x) = \frac{W x^2}{24 E I L}\left(2L^2 + (2L - x)^2\right)$, onde L é o comprimento da viga, x é a distância do engaste até o ponto considerado, W a carga aplicada na extremidade livre e E e I são o módulo de elasticidade e o momento de inércia da sessão, respectivamente. *(Valor 4,0 pontos.)*

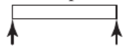
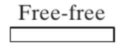
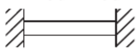
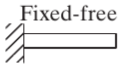
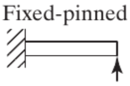
2) Calcule a matriz de impedância mecânica para o sistema mostrado na figura ao lado, considerando que existe uma matriz de amortecimento diagonal de valor conhecido. O momento de inércia de massa de um cilindro é $J_0 = \frac{1}{2} m R^2$. Quantas frequências naturais tem este sistema? Monte uma equação que permita calcular a ou as frequências naturais deste sistema, mas não a resolva. Resolva o problema considerando como coordenadas generalizadas os deslocamentos horizontais em relação ao apoio fixo na direita. *(Valor 6,0 pontos.)*



$\omega = 2\pi f$ $\quad f = \frac{1}{\tau}$ $\quad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2, \quad U = \frac{1}{2} \kappa x^2, \quad U = \frac{1}{2} F x$ $\quad \delta_{st} = \frac{F_0}{k}$

$m = 20 \log_{10} M \text{ dB}$ $\quad \delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right), \quad \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \delta = 2\pi\zeta \text{ para } \zeta \ll 1$ $\quad x(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t) \pm \frac{\mu N}{k}$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}}, \quad \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n, \quad \zeta = \frac{c}{c_c}, \quad c_c = 2 m \omega_n$ $\quad \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$

End Conditions of Beam	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Value of $\beta_n l$
Pinned-pinned 	$\sin \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
Free-free 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x + \alpha_n(\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$ ($\beta l = 0$ for rigid-body mode)
Fixed-fixed 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\sinh \beta_n x_n x - \sin \beta_n x + \alpha_n(\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$
Fixed-free 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \alpha_n(\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 1.875104$ $\beta_2 l = 4.694091$ $\beta_3 l = 7.854757$ $\beta_4 l = 10.995541$
Fixed-pinned 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \alpha_n(\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$

$H(i\omega) = \frac{1}{(1-r^2) + i\,2\zeta r}, \; |H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$ $\quad \frac{F_T}{\kappa Y} = r^2 \left(\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}$ $\quad \boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F_0}$ $\quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1}\boldsymbol{F_0}$ $\quad \boldsymbol{Z}(i\omega) = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$