2017.1-EE01-Gabarito

July 10, 2017

1 2017.1 1º Exercício Escolar

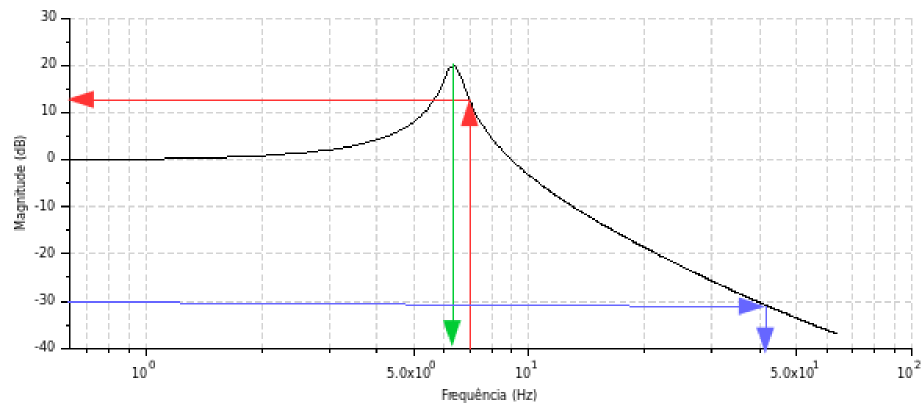
1.1 Questão 1

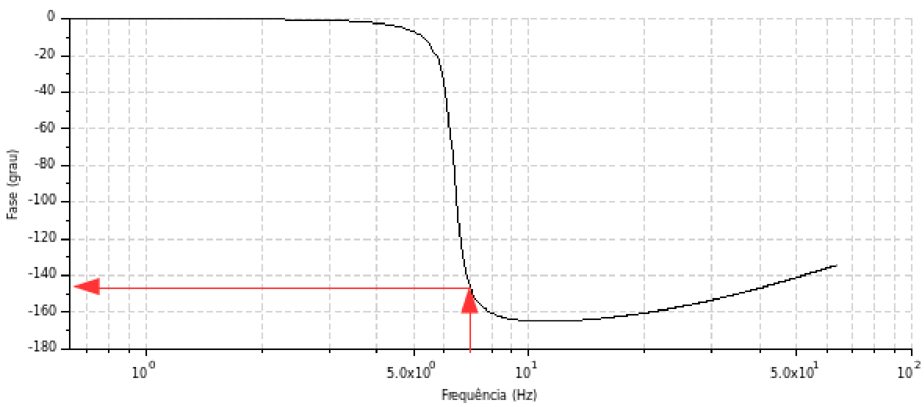
1.1.1 Amplitude e fase da resposta

```
In [1]: from math import pi, log10, sqrt, log, ceil
        from IPython.display import Image

        from bokeh.io import output_notebook
        from bokeh.plotting import figure, show
        from bokeh.models import BoxAnnotation
        output_notebook()

        import numpy as np
```

Claramente, esta questão deve ser resolvida graficamente, usando o diagrama de Bode fornecido na prova. A amplitude e a frequência de operação, são, respectivamente:

```
In [2]: A = 0.002   # 2mm
        N = 420     # RPM
        f = N/60.0         #
        f

Out[2]: 7.0

In [3]: Image('bode_01.png')

   Out[3]:
```





Claramente, dos gráficos acima, a amplificação do deslocamento é aproximadamente 12 dB e ângulo de fase é -145°.

Do forumulário temos que $m = 20\log_{10} M$ dB, portanto a transmissibilidade de deslocamentos pode ser calculada como:

$$12 = 20\log_{10} T_d$$

ou

$$\frac{12}{20} = \log_{10} T_d$$

ou

$$T_d = 10^{0.6}$$

In [4]:
```
Td = 10**(0.6)
Td
```

Out[4]:
```
3.9810717055349722
```

A amplitude de deslocamento é então a amplitude da base vezes a transmissilibidade de deslocamento,

```
In [5]: X = A * Td
        X
```

```
Out[5]: 0.007962143411069945
```

Ou, aproximadamente 8mm, e o ângulo de fase sai diretamente do gráfico como aproximadamente -145°.

1.1.2 Frequência de ressonância

Novamente, do gráfico, admitindo que o amortecimento é pequeno (é facilmente verificável que este é o caso, pois a Transmissibilidade de deslocamento máxima é da ordem de 10), a ressonância ocorre para a maior amplitude da resposta, que corresponde a uma frequência de aproximadamente 6,2 Hz. Isto está marcado com a seta verde na figura.

```
In [6]: fn = 6.2
        wn = 2*pi*fn
        wn
```

```
Out[6]: 38.955748904513435
```

1.1.3 Menor frequência de operação

Temos que calcular qual a menor frequência de operação, para que a amplitude do sistema seja no máximo 3% da amplitude do base. É obvio portanto que $T_d = 0.03$, então

```
In [7]: Td=0.03
        m = 20*log10(Td)
        m
```

```
Out[7]: -30.45757490560675
```

Então temos que tirar do gráfico a frequência para a qual o magnitude é maior do que aproximadamente -30 dB. Está marcado no gráfico com a seta azul. Podemos ver que uma frequência um pouco maior do que 40 Hz garantiria isto. Vamos tomar 45Hz por garantia.

```
In [8]: f = 45      # Hz
        N = 45*60   # rpm
        N
```

```
Out[8]: 2700
```

Então a aproximadamente 2700 rpm a amplitude de vibração do sistema é menor do que 3% da amplitude de entrada.

Este problema é muito fácil.

1.2 Questão 2

Claramente este é um problema de atrito de Coulomb. Temos os seguintes dados

In [9]:
```
m = 20   # kg
k = 10000 # N/m
mu = 0.25
x0 = 0.05 # m
```

Para problemas com atrito de Coulomb, a frequência natural é mesma de um problema sem amortecimento, isto é,

In [10]:
```
wn = sqrt(k/m)
wn
```

Out[10]: 22.360679774997898

O número de semiciclos até a parada pode ser calculado diretamente como:

$$r = \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}}$$

No caso, temos:

In [11]:
```
g = 9.8   # m/s^2
N = m*g   # N
delta_min = mu*N/k    # m
delta_min
```

Out[11]: 0.0049

O valor mostrado acima é o menor deslocamento para o qual a mola ainda consegue mover o bloco. Para qualquer valor abaixo deste, a força elástica é menor do que a força de atrito.

In [12]:
```
r = (x0 - delta_min)/(2*delta_min)
r
```

Out[12]: 4.6020408163265305

Obviamente, a massa não completou um número inteiro de semiciclos, o que era esperado pois seria uma tremenda conincidẽncia, e o que responde ao último quesito desta questão, claramente ela não para na posição de equilíbrio da mola não deformada.

A massa *completa* 4 semiciclos antes de parar, e para durante o quinto. O último semiperíodo é mais sutil. A equação de movimento $x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t \pm \mu N/k$ continua valendo. O movimento só se encerra quando a velocidade se torna zero, e a força da mola não é mais suficiente para colocá-la em movimento.

Vamos ver em um gráfico o que acontece neste caso em particular, pois acho ilustrativo.

In [13]:
```
taun = 2*pi/wn
taun
```

```
Out[13]: 0.280992589241629
```

Não se preocupem com o código abaixo, é só para gerar o gráfico.

```
In [14]: nper = 5      # HALF periods
         npoint = 300
         tstart = 0
         data_t = np.linspace(0, nper*taun, nper*npoint)
         delta_x  = np.zeros((nper*npoint,))
         data_x  = np.zeros((nper*npoint,))
         sign = 1
         A = x0 - delta_min
         for ip in range(nper):
             delta_x[tstart:tstart+npoint] = sign*delta_min
             data_x[tstart:tstart+npoint] = A*np.cos(0.5*data_t[tstart:tstart+npoint]*wn) + \
                 delta_x[tstart:tstart+npoint]
             sign *= -1
             tstart += npoint
             A -= 2*delta_min
         p = figure(width=800)
         p.line(y=data_x, x=data_t, color='blue')
         p.line(y=delta_x, x=data_t, color='red')
         fric_box = BoxAnnotation(bottom=-delta_min, top=delta_min, fill_alpha=0.1, fill_color='
         p.add_layout(fric_box)
         show(p)
```

O que acontece na verdade é que a massa completa o próximo ciclo. Não acreditem nisto por causa do gráfico acima, este gráfico apenas plota o que eu queria mostrar, não é o resultado de uma simulação. Acreditem nisto por causa da solução da equação diferencial e por causa das regiões nas quais ela vale, ou não.

Como a fórmula da prova estava com o sinal errado, $r \leq \ldots$ ao invés de $r \geq \ldots$, eu considerei correto todos os que arredondaram para baixo, para quatro, ao invés de 5.

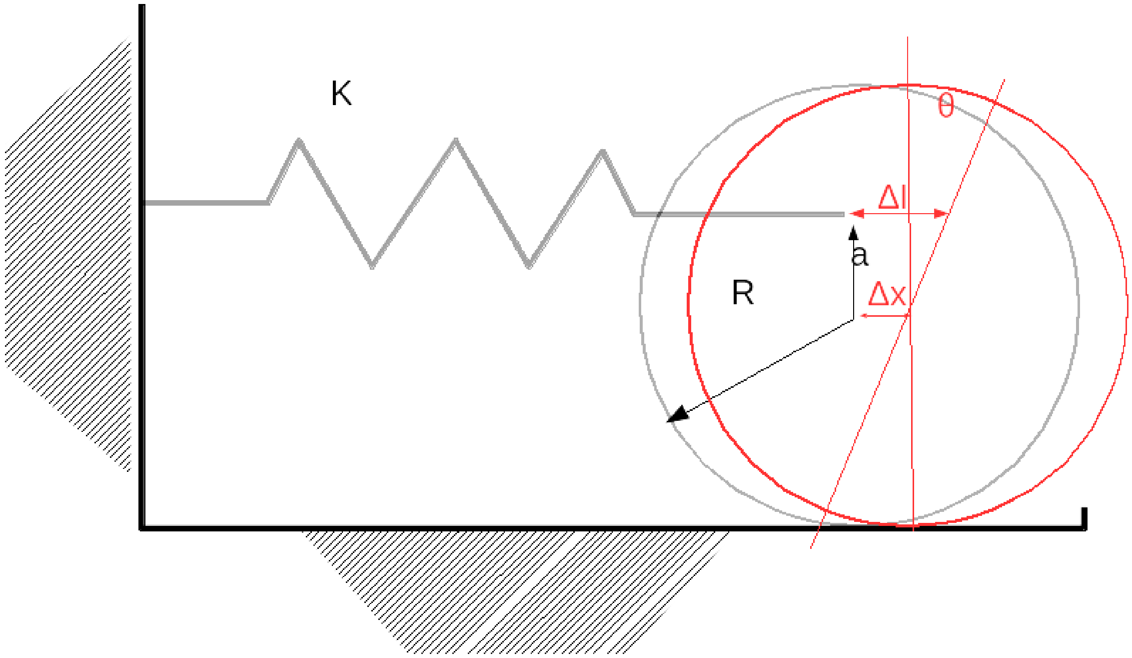
O tempo até a parada pode então ser calculado facilmente como o número de semiciclos até a parada multiplicado pelo tempo gasto em cada semiciclo, que é meio período natural, naturalmente.

```
In [15]: total_time = ceil(r)*taun/2.0
         total_time

Out[15]: 0.7024814731040725
```

1.3 Questão 3

Vamos supor, é claro e como sempre, que o sistema sofra apenas pequenos deslocamentos e rotações. Vamos examinar o sistema levamente deslocado de sua posição de repouso.

```
In [16]: Image("spring_mass.png", width=600)

Out[16]:
```



Percebam que estou considerando o aumento do comprimento da mola Δl e o deslocamento do centro do cilindro de Δx.

Para pequenas rotações, $\Delta x = R\theta$, e $\Delta l = \Delta x + a\theta = (R + a)\theta$.

1.3.1 Frequência natural

Para usar o método de Rayleigh, supomos que o deslocamento seja harmônico e igualamos as energias potencial e cinética máximas.

Se o deslocamento do centro do cilindro for $\Delta x(t) = X \cos \omega t$, o ângulo de rotação do cilindro é $\theta(t) = X/R \cos \omega t$.

A energia potencial máxima é $U_{max} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$, onde x_{max} é a máxima deflexão, da mola, que ocorre para X_{max}.

Temos então que $U\_max = \frac{1}{2}K(x\_max + a\theta_{max})^2 = \frac{1}{2}K(\theta maxR + a\theta_{max})^2 = \frac{1}{2}K\theta max^2(R + a)^2$.

Como estamos considerando o cilindro como um corpo rígido com dimensões, e não uma partícula, temos que considerar a inércia rotacional na energia cinética. A energia cinética total é então $T_{max} = \frac{1}{2}m\Delta\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$.

Sabendo que $J_0 = \frac{1}{2}mR^2$, ficamos com $T_{max} = \frac{1}{2}\left(m\Delta\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\right)$. No entanto, $\Delta\dot{x} = \dot{\theta}R$, assim $T_{max} = \frac{1}{2}\left(m\dot{R}^2\theta^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\right)$, ou

$$T_{max} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

.

Como o movimento é harmônico, a velocidade máxima é $\dot{\theta}_{max} = \omega^2\theta_{max}$, portanto

$$T_{max} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\omega^2\theta_{max}^2$$

.

Igualando a energia potencial máxima à energia cinética máxima, temos que

$$\frac{1}{2}K\theta_{\max}^2(R+a)^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\omega^2\theta_{\max}^2,$$

ou

$$K(R+a)^2 = \frac{3}{2}mR^2\omega^2,$$

o que leva a

$$\omega_n^2 = \frac{K}{1.5m}\frac{(R+a)^2}{R^2},$$

e, finalmente

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{1.5m}}\frac{(R+a)}{R}.$$

No caso, temos:

```
In [17]: K = 20000    # N/m
         m = 10       # kg
         R = 0.25     # m
         a = 0.20     # m
         wn = sqrt(K/(1.5*m))*(R+a)/R    # rad/s
         wn
         f = wn/(2*pi)                  # Hz
         (wn, f)

Out[17]: (65.72670690061993, 10.460730296385849)
```

1.3.2 Energia dissipada por ciclo

Sabemos que após 1000 ciclos, a amplitude de vibração é 75% porcento da amplitude inicial. Com o decremento logarítimico podemos calcular os fatores de amortecimento histerético. Do formulário, $\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_{n+1}}$. No caso,

```
In [18]: delta = log(1/0.75)/1000
         delta

Out[18]: 0.00028768207245178084
```

O que é claramente muito baixo, como era de se esperar, e que permite que todas as nossas hipóteses sejam válidas. Diretamente do formulário, podemos calcular a energia dissipada por ciclo, usando $\beta = \delta/\pi$, $h = \beta k$, e $\Delta W/X^2 = \pi h$.

A única sutileza aqui é que precisamos usar o K equivalente correto, que não é o K da mola diretamente. Podemos é claro simplesmente fazer $\frac{1}{2}K_t\theta^2 = \frac{1}{2}K\theta^2(R+a)^2$, da primeira parte do problema, de onde vemos que $K_t = K(R+a)^2$, ou, simplesmente, olhar a expressão da frequência natural e ver o que aparece no numerador do radicando. No caso então,

```
In [19]: Kt = K * (R+a)**2
         Kt

Out[19]: 4050.0000000000005
```

In [20]:
```
beta = delta/pi
h = beta*k
(h, beta)
```

Out[20]:
```
(0.9157204773924338, 9.157204773924338e-05)
```

In [21]:
```
H = pi*h
H            # J/m^2
```

Out[21]:
```
2.8768207245178083
```

A equação de movimento para um sistema com 1 grau de liberdade em vibração livre é, sem surpresas, $m_{\text{eq}}\ddot{z} + c_{\text{eq}}\dot{z} + k_{\text{eq}}z = 0$, onde z é a coordenada equivalente escolhida e as grandezas equivalentes são calculadas em função desta coordenada. A maneira mais elegante e inteligente de escrever esta equação, para um sistema com amortecimento histerético, em particular, é dividir todos os temos pela massa equivalente,

$$\ddot{z} + \frac{c_{\text{eq}}}{m_{\text{eq}}}\dot{z} + \frac{k_{\text{eq}}}{m_{\text{eq}}}z = 0,$$

mas,

$$\frac{k_{\text{eq}}}{m_{\text{eq}}} = \omega_n^2, \qquad \frac{c_{\text{eq}}}{m_{\text{eq}}} = \frac{\zeta c_{c\text{eq}}}{m_{\text{eq}}} = \frac{\zeta 2 m_{\text{eq}}\omega_n}{m_{\text{eq}}} = 2\zeta\omega_n.$$

A equação de movimento fica então,

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n\theta + \omega_n^2\theta = 0,$$

onde temos que $\delta = 2\pi\zeta$ e $\delta = \pi\beta$, assim, $\zeta = \beta/2$. No caso, portanto:

In [22]:
```
zeta = 0.5 * beta
c_red = 2*zeta*wn
wn2 = wn**2
(zeta, c_red, wn2)
```

Out[22]:
```
(4.578602386962169e-05, 0.006018729142046826, 4320.0)
```

A equação de movimento é então:

$$\ddot{\theta} + 6.01 \times 10^{-2}\dot{\theta} + 4320\theta = 0.$$