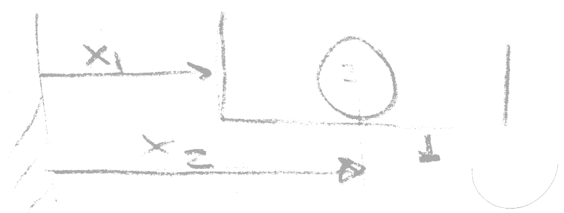
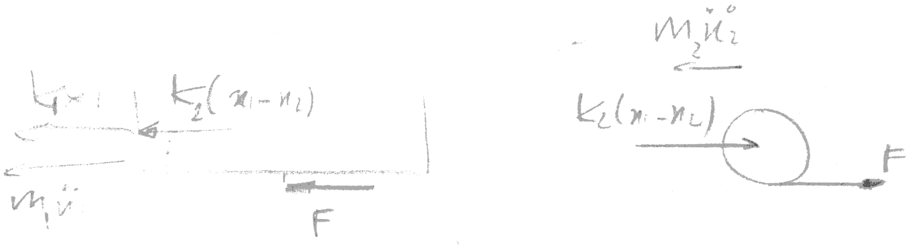
2º chamada 2016.2

Questão 1 Vamos tomar estas coordenadas generalizadas, e imagina que $x_1 > x_2$.



Os DCL dos corpos 1 e 2 são:



Para o corpo 1, temos:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1-x_2) + F = 0$$

Para o corpo 2, temos:

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2(x_1-x_2) - F = 0$$

Também temos, é claro, o equilíbrio de momentos em torno do centro do cilindro:

$Fr = J_0\ddot{\theta}$, mas, é claro que $\theta = (x_1-x_2)/r$; e $\ddot{\theta} = (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)/r$

Assim $Fr = J_0\frac{(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)}{r} \to F = \frac{J_0}{r^2}(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)$, e, para um cilindro de massa m_2, $J_0 = \frac{1}{2}m_2r^2$, então: $F = \frac{1}{2}\frac{m_2r^2}{r^2}(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)$

$$F = \frac{1}{2}m_2(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)$$

Inserindo esta força nas duas equações acima:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 + \frac{1}{2}m_2(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 - \frac{1}{2}m_2(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) = 0 \end{cases}$$; ou

$$\begin{cases} (m_1+\frac{1}{2}m_2)\ddot{x}_1 - \frac{1}{2}m_2\ddot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}m_2\ddot{x}_1 + (m_2+\frac{1}{2}m_2)\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases}$$; ou,

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 + \frac{m_2}{2} & -m_2/2 \\ -m_2/2 & 1{,}5\, m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos colocar valores numéricos para facilitar o entendimento.
Observem que o sistema tem acoplamento elástico e dinâmico!

$m_1 = 50$, $m_2 = 10$, $k_1 = 2000$, $k_2 = 3000$, $\|F\| = 50$

Como não há amortecimento, a matriz de impedância mecânica é

$$\underset{\sim}{Z}(i\omega) = \underset{\sim}{k} - \underset{\sim}{m}\,\omega^2$$

no caso

$$\underset{\sim}{k} = \begin{bmatrix} 5000 & -3000 \\ -3000 & 3000 \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{m} = \begin{bmatrix} 55 & -5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{Z}(\omega) = \begin{bmatrix} 5000 - 55\omega^2 & -3000 + 5\omega^2 \\ -3000 + 5\omega^2 & 3000 - 15\omega^2 \end{bmatrix}$$

O inverso da matriz de impedância mecânica é

$$Z^{-1}(\omega) = \frac{1}{det} \begin{bmatrix} 3000 - 15\omega^2 & 3000 - 5\omega^2 \\ 3000 - 5\omega^2 & 5000 - 55\omega^2 \end{bmatrix};$$

onde $det = (5000 - 55\omega^2)(3000 - 15\omega^2) - (3000 - 5\omega^2)^2$

$$det = 15\times10^6 - 75000\omega^2 - 165000\omega^2 + 825\omega^4 - 9\times10^5 + 30000\omega^2 - 25\omega^4$$

$$\boxed{det = 800\omega^4 - 21\,000\,\omega^2 + 6\times10^5}$$

Só vamos precisar deste valor mais tarde.

O vetor de forças externas é $\underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ e as amplitudes das respostas são:

$$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{Z}^{-1} \underset{\sim}{F} = \frac{1}{det} \begin{bmatrix} 3000 - 15\omega^2 & 3000 - 5\omega^2 \\ 3000 - 5\omega^2 & 5000 - 55\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15000 - 75\omega^2 \\ 15000 - 25\omega^2 \end{bmatrix} \frac{1}{det}$$

Para que a amplitude de movimento da segunda massa seja nula, devemos ter

$15000 - 25\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{15000/25} = 24{,}5\ rad/s$

(Obviamente o valor negativo não faz sentido aqui

Como $\omega^2 = 600$, $det = 800 \times 600^2 - 21.000 \times 600 + 600000$

$det = 276 \times 10^6$

$X_1 = \dfrac{15000 - 75 \times 600^2}{276 \times 10^6} = -1{,}08 \times 10^{-4} = -0{,}108\ mm$

Questão 2 $m_{eq} = 900\,kg$. $k_{eq} = 6\,MN/m$.

De cara, $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\dfrac{6 \times 10^6}{900}} = 81{,}65\ rad/s$, $f_n = 12{,}9\ Hz$, $\tau_n = 0{,}077\ s$

A força externa aplicada é periódica, conforme a figura mostrada. O valor máximo da força é dado por

$F = p \cdot A = 48000 \times 0{,}5 = 24\,000\ N$

A razão de amortecimento é dada no enunciado como $\zeta = 0{,}25$.

Podemos escrever diretamente a série de Fourier da resposta

$$p(t) = F\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin 2\pi t - \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos 4\pi t}{3} + \frac{\cos 8\pi t}{15} + \frac{\cos 12\pi t}{35} + \dots\right\}\right)$$

Vamos construir a resposta termo a termo. Para o termo constante,

$y_0 = \dfrac{F}{\pi k} = \dfrac{24000}{\pi \times 6 \times 10^6} = 0{,}001273 = 1{,}27\ mm$

Para o termo em seno, podemos usar a fórmula de resposta para vibração com força harmônica com $F_0 = F/2 = 12000$,

$\omega = 2\pi$, $\omega_n = 81{,}65$, $\zeta = 0{,}077$,

$$y_1 = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \sin(\omega t - \phi_1) = \frac{12000/666}{\sqrt{(1-0{,}0?)^2 + (2 \times 0{,}25 \times 0{,}077)^2}} = \frac{12000/666}{0{,}991} = 2{,}01 \text{ mm}$$ (4)

$$\phi_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot 0{,}25 \times 1 \times 0{,}077}{1 - 0{,}077^2}\right) = 0{,}0387 \text{ rad}$$

Para os termos em coseno, vamos calcular termos até que a amplitude seja pequena o suficiente.

---

p/ o primeiro termo, $n = 2$, $F_0 = \frac{2F}{\pi 3} = \frac{2 \times 12000}{3\pi} = 2546$

$$y_2 = \frac{2546/k}{\sqrt{(1-2^2 r^2)^2 + (2 \times \zeta \times 2 r)^2}} = \frac{2546/666}{0{,}?} = 0{,}433 \text{ mm}$$

$$\phi_2 = \operatorname{atan}\left(\frac{2 \times 0{,}25 \times 2 \times 0{,}077}{1 - 2^2 \times 0{,}077^2}\right) = 0{,}0?$$

---

p/ o segundo termo, $n = 4$, $F_0 = 2F/15\pi = \frac{2 \times 12000}{15\pi} = 1018$

$$y_3 = \frac{1018/k}{\sqrt{(1-4^2 r^2)^2 + (2 \times 0{,}25 \times 4 r)^2}} = \frac{1018/666}{0{,}91} = 0{,}16840 \text{ mm}$$

$$\phi_3 = 0{,}163$$

---

p/ o terceiro termo, $n = 6$, $F_0 = \frac{2 \times F}{35\pi} = 431$

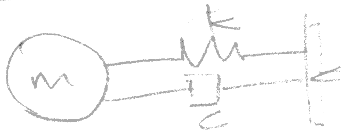
$$y_4 = \frac{431/k}{\sqrt{(1-6^2 r^2)^2 + (2 \times 0{,}25 \times 6 r)^2}} = \frac{431/666}{0{,}?} = 0{,}?\text{ mm}$$

$$\phi_4 = 0{,}295$$

A resposta é então:

$$x(t) = 1{,}27 + 2{,}01 \operatorname{sen}(2\pi t - 0{,}0351) +$$
$$+ 0{,}433 \cos(4\pi t - 0{,}075) + 0{,}168 \cos(6\pi t - 0{,}168) +$$
$$0{,}08 \cos(6\pi t - 0{,}285)$$

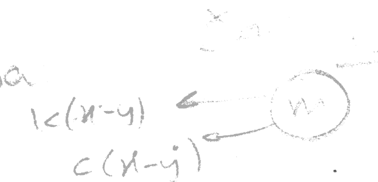
Questão 3



$\dot{y} = A_0 \cos \omega t$

Se a velocidade é dada por $\dot{y} = A_0 \cos \omega t$, o deslocamento é a integral da velocidade: $y(t) = \frac{A}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$

DCL da massa



$$m\ddot{x} + k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) = 0$$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$, aplicando a transformada de Laplace de ambos lados, e lembrando que para o cálculo da função de transferência desconsideramos as condições iniciais, pode-se escrever:

$$ms^2 X(s) + csX(s) + kX(s) = kY(s) + scY(s)$$
$$(ms^2 + cs + k) X(s) = (k + cs) Y(s)$$

$$\boxed{T(s) = \frac{k + cs}{ms^2 + cs + k}}$$