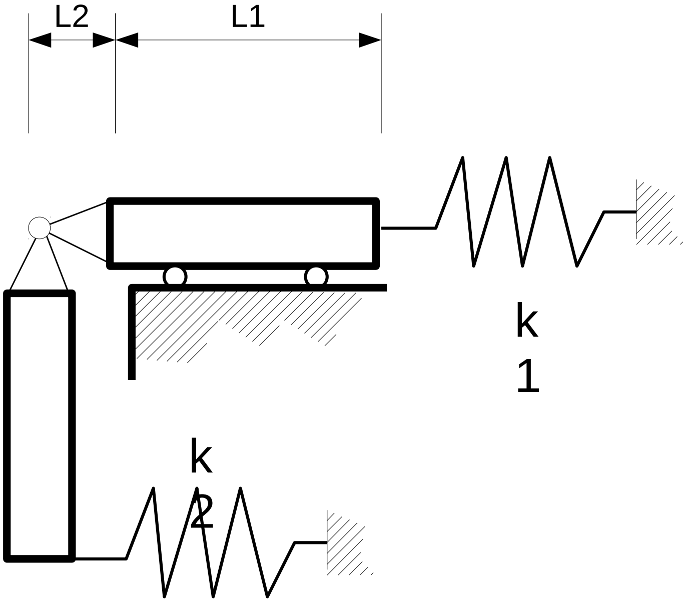
Vibrações Mecânicas **2º EE** **2º Semestre de 2016**



1) Na figura ao lado, os dois corpos são idênticos. Os comprimentos L1 e L2 são 500 e 100 mm, respectivamente, e a massa de cada corpo é 1kg. A rigidez da mola K1 é igual a 5,0 kN/m, e da mola K2 é 1,2 kN/m. Sobre o corpo que desliza sem atrito sobre o plano age uma força horizontal, harmônica, de intensidade 10 N e frequência 460 Hz. O único amortecimento que existe no sistema age apenas sobre o corpo horizontal, colinear com a mola K1, com o valor de 15 Ns/m. Calcule as frequências naturais, modos normais e o deslocamento em regime permanente do sistema. O momento de inércia de uma barra de massa "m" e comprimento "l" é em relação ao centro de gravidade é $J0 = ml^2/12$, e o teorema dos eixos paralelos diz que $J = J0 + mr^2$, onde "r" é a distância entre os eixos considerados, caso isto seja necessário. *(Valor 5,0 pontos)*

2) No centro de uma placa circular fina de aço, com diâmetro igual a 250 mm com espessura de 2 mm, está localizada uma massa concentrada igual a 1.2 kg. Esta placa age como um diafragma de uma câmara pressurizada, e pode ser considerada engastada em toda a sua borda. Podemos determinar que, se for aplicada uma força concentrada no centro de uma placa circular engastada, a deflexão em seu centro é dada por $y_{\max}=\frac{P r^2}{16\pi D}$, onde r é o raio da placa, e $D=\frac{E t^3}{12(1-\nu)^2}$ é a rigidez de flexão da placa. E e ν são o módulo de Young e coeficiente de Poisson, 210 GPa e 0,30, respectivamente, para o aço, e t a espessura da placa. No interior da câmara, ocorre um pulso de pressão, que pode ser aproximado por uma pressão constante de intensidade igual a 80KPa, com duração de 0.1 segundo. Resultados experimentais mostram que o amortecimento é aproximadamente 0.5% do amortecimento crítico. Calcule o deslocamento da massa no centro da membrana durante a explosão. *(Valor 5.0 pontos)*

Obs: Pode ser útil saber que

$$\int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\cos(\omega_d(t-\tau))\,d\tau=\frac{\omega_n\zeta}{\omega_n^2\zeta^2+\omega_d^2}-\frac{\omega_n\zeta\cos(\omega_d t)-\omega_d\sin(\omega_d t)e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n^2\zeta^2+\omega_d^2}$$

*3) Questão **bônus**, a pontuação pode ser usada em qualquer prova do semestre se estiver 100% correta, caso contrário conta apenas para esta prova. A nota máxima continua sendo 10, é claro.* Repita a questão 2 considerando a massa da placa. (Valor 3.0 pontos)

Fórmulas no verso!

Prof. Ramiro Willmersdorf 14/12/2016

$$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{\tau} \qquad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2, \quad U = \frac{1}{2} \kappa x^2, \quad U = \frac{1}{2} F x \qquad k_t = \frac{GJ}{l}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}}, \quad \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n, \quad \zeta = \frac{c}{c_c}, \quad c_c = 2m\omega_n \qquad \delta_{st} = \frac{F_0}{k} \qquad J_0 = \frac{1}{2} m R^2$$

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \varphi), X = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2 + \dot{x}_0^2 + 2x_0\dot{x}_0^2\zeta\omega_n}}{\omega_d}, \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n, \varphi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{x_0\omega_d}\right)$$

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad H(i\omega) = \frac{1}{(1-r^2) + i2\zeta r}, |H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta j r)^2}}\cos(j\omega t - \varphi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta j r)^2}}\sin(j\omega t - \varphi_j)$$

$$\varphi_j = \arctan\left(\frac{2\zeta j r}{1 - j^2 r^2}\right) \qquad x(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau$$

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right), \quad \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \delta = 2\pi\zeta \text{ para } \zeta \ll 1 \qquad Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs} \qquad \boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F_0}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1}\boldsymbol{F_0} \qquad \boldsymbol{Z}(i\omega) = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$