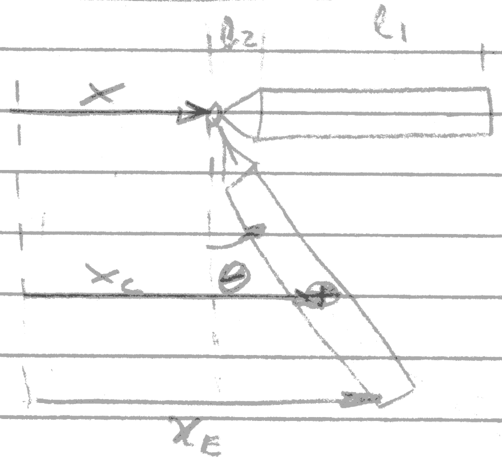
Questão 1.



Para facilitar:

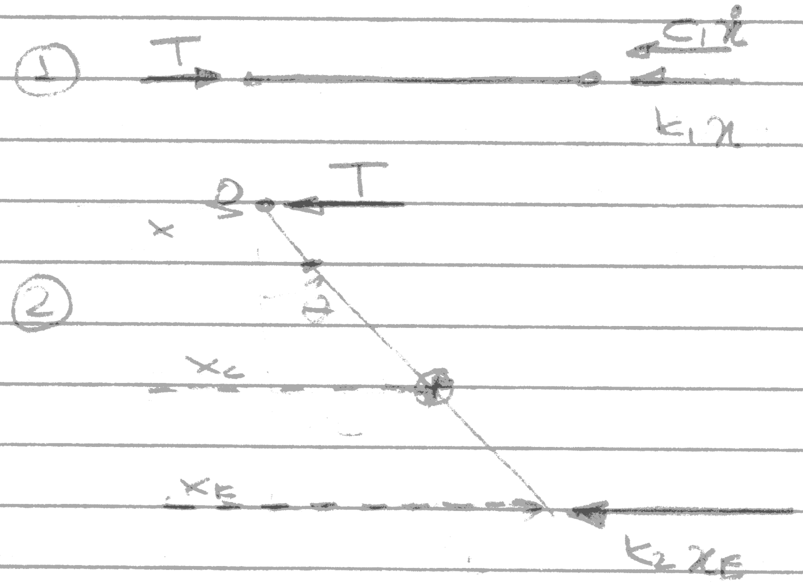
$l_c = l_2 + \frac{l_1}{2}$

$l = l_1 + l_2$

Para deslocamento pequeno

$x_c = x + l_c\theta$, $\quad x_E = x + l\theta$

DCL para cada barra:



De (1), $\Sigma F_x = 0$

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1 x = T \qquad (*)$$

De ② $\sum F_x = 0$ $\quad m\ddot{x}_c + k_2 x_E + T = 0 \quad (**)$

Usando $(*) \Rightarrow$ $\quad m\ddot{x}_c + k_2 x_E + m\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1 x = 0$

$$m(\ddot{x} + l_c\ddot{\theta}) + k_2(x + l\theta) + m\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1 x = 0$$

$$2m\ddot{x} + ml_c\ddot{\theta} + c_1\dot{x} + (k_1+k_2)x + k_2 l\theta = 0 \quad (***)$$

De ② $\sum M_{CG} = 0$

$$J_{CG}\ddot{\theta} + k_2 x_E \frac{l_1}{2} - T l_c = 0$$

Usando ② para eliminar T

$$J_{CG}\ddot{\theta} + k_2 x_E \frac{l_1}{2} + (m\ddot{x}_c + k_2 x_E) l_c = 0$$

$$J_{CG}\ddot{\theta} + k_2 x_E \frac{l_1}{2} + m\ddot{x}_c l_c + k_2 x_E l_c = 0$$

$$J_{CG}\ddot{\theta} + k_2 \frac{l_1}{2}(x + l\theta) + ml_c(\ddot{x} + l_c\ddot{\theta}) + k_2 l_c(x + l\theta) = 0$$

$$J_{CG}\ddot{\theta} + ml_c\ddot{\theta} + ml_c\ddot{x} + k_2\frac{l_1}{2}x + k_2\frac{l_1}{2}l\theta$$
$$+ k_2 l_c x + k_2 l_c l\theta = 0$$

$$(J_{CG} + ml_c)\ddot{\theta} + ml_c\ddot{x} + k_2\left(\frac{l_1}{2} + l_c\right)x + k_2\left(\frac{l_1 l}{2} + l_c l\right)\theta = 0$$

$\frac{l_1}{2} + l_c = l$ (da definição de l_c)

$$\frac{l_1 l}{2} + l_c l = \frac{l_1}{2}(l_1+l_2) + \left(\frac{l_1}{2}+l_2\right)(l_1+l_2)$$

$$= \frac{l_1^2}{2} + \frac{l_1 l_2}{2} + \frac{l_1^2}{2} + \frac{l_1 l_2}{2} + l_1 l_2 + l_2^2 =$$

$$= l_1^2 + 2 l_1 l_2 + l_2^2 = (l_1+l_2)^2 = l^2$$

Assim a equação torna-se

$$(J_{cg} + m l_c)\ddot{\theta} + m l_c \ddot{x} + k_2 l x + k_2 l^2 \theta = 0 \quad (**)$$

As equações do movimento são então (*) e (**)

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} + m l_c \ddot{\theta} + c_1 \dot{x} + (k_1+k_2)x + k_2 l \theta = 0 \\ m l_c \ddot{x} + (J_{cg} + m l_c)\ddot{\theta} + k_2 l x + k_2 l^2 \theta = 0 \end{cases}$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2m & m l_c \\ m l_c & (m l_c + J_{cg}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obs: Esqueci da força externa aplicada! Esta vai ser somada na primeira equação.

A matriz de impedância mecânica é

$Z(\omega) = k - m\omega^2 + ic\omega$, ou, no caso:

(4)

$$\underset{\sim}{Z}(i\omega) = \begin{bmatrix} (k_1+k_2) - \omega^2 2m + ic_1\omega & k_2 l - m l_c \\ k_2 l - m l_c & k_2 l^2 - \omega^2 (m l_c + J_{ca}) \end{bmatrix}$$

Temos que: $k_1 = 5000$, $k_2 = 1200$, $m = 1$,

$c_1 = 15$

$l = l_1 + l_2 = 0{,}60\ m$

$l_c = \frac{l_1}{2} + l_2 = 0{,}250 + 0{,}1 = 0{,}35\ m$

A frequência da força de excitação é:

$\omega = 440 \times 2\pi = 2765\ rad/s$

O momento de inércia em relação ao centro de gravidade é:

$$J_{ca} = \frac{m l^2}{12} = \frac{1 \times 0{,}5^2}{12} = 0{,}0208$$

A matriz de impedância mecânica é então:

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{bmatrix} -1{,}528 \times 10^7 + 4{,}147 \times 10^4 i & 7{,}155 \times 10^2 \\ 7{,}166 \times 10^2 & -2{,}833 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

O vetor de forças externas é:

$$F = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema $\underset{\sim}{Z}\,\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{F}$

$$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{Z}^{-1}\,\underset{\sim}{F}$$

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} -6{,}54\times10^{-7} - 1{,}77\times10^{-9}\,i \\ -1{,}66\times10^{-10} - 4{,}51\times10^{-13}\,i \end{bmatrix}$$

As magnitudes da vibração são:

$$X = \begin{bmatrix} 6{,}54\times10^{-7} \\ 1{,}662\times10^{-10} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

ou $0{,}654$ mm e $9{,}51\times10^{-9}$ graus,

ou, praticamente só a barra longarina vibra

As frequências naturais podem ser obtidas do sistema sem amortecimento:

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2) - w^2 2m & k_2 l - m l_c \\ k_2 l - m l_c & k_2 l^2 - w^2 (m l_c + J_c) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6200 - 2w^2 & 715{,}65 \\ 715{,}65 & 432 - w^2 (0{,}3708) \end{bmatrix}$$

$$6200\times432 - w^2\times(0{,}3708\times6200) - w^2\times864 + w^4\, 0{,}3708\times2 - 715{,}65^2 = 0$$

$$w^4\times0{,}7416 - w^2\, 3183 + 5{,}139\times10^5 = 0$$

$$w_{1,2}^2 = \frac{3183 \pm \sqrt{3183^2 - 4\times0{,}7416\; 5{,}17\times10^5}}{2\times0{,}7416}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3188 \mp 2932}{2{,}4832}$$

$\omega_1^2 = 172{,}6$, $\omega_2^2 = 4126{,}2$

$\omega_1 = 13{,}14 \ \frac{rad}{s}$, $\omega_2 = 64{,}24 \ rad/s$

para $\omega_1^2 = 172{,}6$, da primeira equação

$$6200 \times 2 \times 172{,}6 \, X_1^{(1)} + 719{,}61 X_2^{(1)} = 0$$

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = -\frac{2{,}14 \times 10^{6}}{719{,}65} = 2973{,}9$$

(Não se assustem com o tamanho, uma unidade é metros, a outra é radianos, não são diretamente comparáveis)

Para $\omega_2^2 = 4126{,}2$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{6200 \times 2 \times 4126{,}2}{719{,}65} = 7{,}105 \times 10^{4}$$

Questão 2

$\emptyset = 250mm$

$t = 2mm$

$m = 1,2$

$y_{max} = \dfrac{Pa^2}{16\pi D}$

$D = \dfrac{E t^3}{12(1-\nu)^2}$

$E = 210 GPa \quad \nu = 0,30$

$$D = \frac{210 \times 10^5 \times (0,002)^3}{12(1-0,3)^2} = 285$$

Como a única informação que temos sobre a rigidez da mesa é esta, temos que usar esta para calcular a rigidez equivalente

$$k = \frac{P}{y_{max}} = \frac{16\pi D}{a^2} = 9,15 \times 10^5 \ N/m$$

A resposta a uma força arbitrária pode ser calculada com a integral de Duhamel

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

onde $g(t) = e^{-\zeta \omega n t} \sin \omega d (t-\tau)$

Desprezando a massa da placa, a frequência natural é

8

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9{,}19\times10^5}{1{,}2}} = 875{,}19\ rad/s \cong 140\ Hz$

$\zeta = 0{,}005$, que é praticamente desprezível, assim:

$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \approx \omega_n = 875{,}19\ rad/s$

Durante a explosão, a força é constante e igual a

$F = p \cdot A = 80000 \times \frac{\pi \times 0{,}25^2}{4} = 3{,}93\ kN$

O deslocamento é então:

$x(t) = \int_0^t F(\tau)\, e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau))\, d\tau =$

$F \int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau))\, d\tau =$

$F\left(\frac{\omega_n\zeta}{\omega_n^2\zeta^2+\omega_d^2} - \frac{\omega_n\zeta\cos(\omega_d t) - \omega_d\sin(\omega_d t)\, e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n^2\zeta^2+\omega_d^2}\right), \quad \omega_d \approx \omega_n$

$F\left(\frac{\zeta}{\omega_n(1+\zeta)} - \frac{\zeta\cos(\omega_d t) - \sin(\omega_d t)\, e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n(1+\zeta^2)}\right) =$

$= \frac{F}{\omega_n}\left(\zeta - \zeta\cos\omega_n t - \sin\omega_n t\, e^{-\zeta\omega_n t}\right)$

no caso: $x(t) = \frac{3930}{875{,}2} \cdot \left(0{,}005 - 0{,}005\cos 875{,}2t - \sin 875{,}2t\, e^{-0{,}005\times875{,}2t}\right)$

$x(t) = 4{,}497\left(0{,}005 - 0{,}005\cos 875{,}2t - e^{-4{,}376t} \sin 875{,}2t\right)$

OBS: É claro que a integral está errada, pois eu usei

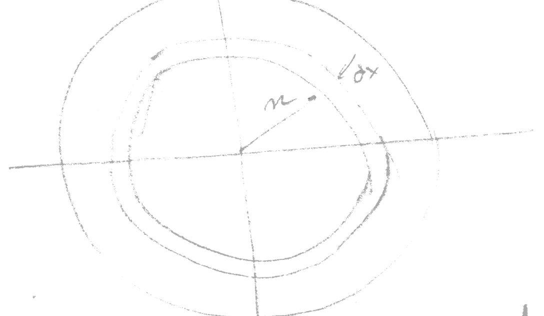
Questão 3: Precisamos coordenar de alguma forma a massa da placa. Como não sabemos a deflexão correta da placa, temos que estimá-la de alguma forma. Uma placa engastada em seu bordo tem que ter a deformação com este "jeito", vista em um corte radial.

Como a placa é engastada, as derivadas do deslocamento na direção radial tem que ser nulas.

Um meio período do cosseno tem esta característica, então, considerando a simetria radial, podemos aproximar, para fins de cálculo de massa equivalente, o deslocamento radial como

$$y(r) = y_{max} \cos\left(\frac{\pi x}{2r}\right)$$

Vamos calcular a massa equivalente através da equivalência das energias cinéticas:



Supondo que cada anel circular vibre em fase e com a mesma frequência, a energia cinética é

$T = \int_0^R \frac{1}{2} dm\, \dot{y}^2$ (10)

Como a largura do anel é infinitesimal, sua área é $dA = 2\pi r\, dx$, o volume é $dV = 2\pi r\, t\, dx$, e a massa é $dm = \rho\, t\, 2\pi r\, dx$.

Se o deslocamento é harmônico, a amplitude de velocidade máxima em cada raio é $\omega^2 y(r)$,

então:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^R \rho t\, 2\pi r\, \omega^2 y_{max}^2 \cos^2\left(\frac{\pi r}{2R}\right) dx$$

$$T = \frac{1}{2} \rho t\, 2\pi\, \omega^2 y_{max}^2 \int_0^R r \cos^2\left(\frac{\pi r}{2R}\right) dx$$

Esta integral não é trivial, e seu valor é

$$T = \frac{1}{2} \rho t\, 2\pi\, \omega^2 y_{max}^2 \frac{(\pi^2 - 4) R^2}{4\pi^2}$$

$$T = \frac{1}{2}\, 2(\underbrace{\rho\, t\, \pi R^2}_{m_p}) \frac{(\pi^2 - 4)}{4\pi^2} \omega^2 y_{max}^2 = \frac{1}{2}\, m_p \frac{(\pi^2-4)}{2\pi^2} \omega^2 y_{max}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_p\, 0.297\, y_{max}^2\, \omega^2$$

Comparando com uma massa equivalente que vibra com a mesma frequência e amplitude

$$\boxed{m_{eq} = 0,297\, m_p}$$

$$\frac{1}{2} m_{eq}\, \omega^2 y_{max}^2 = \frac{1}{2} \, 0,297\, y_{max}^2 \omega^2$$

A massa equivalente é portanto menos de um terço da massa da placa, devido ao fato das bordas, que concentram a maior parte da massa, terem baixa velocidade

Basta agora acrescentar esta massa à massa concentrada, recalcular a frequência natural, recalcular e se você for muito precavido (não é necessário pois é muito pequeno) e recalcular a integral