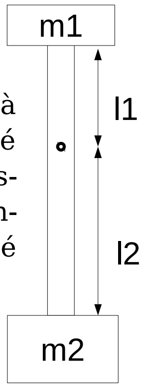
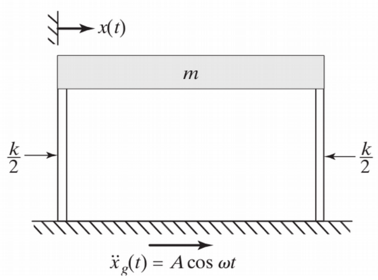


1) Calcule o período do pêndulo composto mostrado ao lado, usando o fato de que a frequência natural é a única para a qual a energia cinética máxima é igual à energia potencial máxima (método de Rayleigh). Considere que a barra central é rígida, porém tem massa igual a 3 Kg, que as massas m1 e m2 sejam 1 e 2 kg, respectivamente, e que os comprimentos l1 e l2 sejam 100 e 250 mm respectivamente. O momento de inércia de uma barra em torno do seu centro de gravidade é $ml^2/12$ e em relação à sua extremidade é $ml^2/3$; *(Valor 2.0 pontos)*

2) Um sistema de detecção de vibração excessiva se baseia na ressonância de um fio de muito pequeno diâmetro que é mantido sob tração pura dentro do detector. Se o fio tem 0.05 mm de diâmetro, 30 mm de comprimento, e é feito de aço de alta resistência, com massa específica igual a 7700 kg/m e tensão de escoamento igual 660 MPa, qual a mais alta frequência fundamental para a qual este detector pode ser regulado? Considere que o detector é ajustado através de um parafuso que modifica a força de tração no fio, e que para esta aplicação, é razoável usarmos um fator de segurança igual a 2. *(Valor 2.0 pontos.)*

3) Encontre as equações de movimento, a equação característica e calcule as frequências naturais e modos normais para o sistema mostrado ao lado, admitindo que a barra seja rígida e esteja sob efeito da gravidade. As molas tem a mesma rigidez, e o suporte móvel da barra vertical tem massa desprezível. *(Valor 3.0 pontos.)*

4) Calcule o deslocamento horizontal do piso mostrado ao lado, sabendo que a aceleração do piso é $100 \sin \omega t$ mm/sec², com a massa do piso igual a 2000 kg, a rigidez total das colunas igual a 0.1 MN/m, a frequência de excitação igual a 25 rad/s. Suponha que, em uma experiência anterior, foi dado um impulso horizontal ao piso, e foi medido que após 100 ciclos completos em vibração livre a amplitude de vibração caiu à 1/5 da amplitude inicial. *(Valor 3.0 pontos.)*



Formulário no verso.

$$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{\tau} \qquad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2, \quad U = \frac{1}{2} \kappa x^2, \quad U = \frac{1}{2} F x$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}}, \quad \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n, \quad \zeta = \frac{c}{c_c}, \quad c_c = 2 m \omega_n \qquad \delta_{st} = \frac{F_0}{k} \qquad J_0 = \frac{1}{2} m R^2$$

$$x(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \varphi), X = \frac{\sqrt{x_0^2 \omega_n^2 + \dot{x}_0^{2} + 2 x_0 \dot{x}_0^{2} \zeta \omega_n}}{\omega_d}, \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n, \varphi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{x_0 \omega_d}\right)$$

$$T_d = \frac{X}{Y} = \left(\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \frac{M x}{m e} = r^2 |H(i\omega)|, \varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

$$H(i\omega) = \frac{1}{(1-r^2) + i\,2\zeta r}, |H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \frac{F_T}{\kappa Y} = r^2 \left(\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/k}{\sqrt{(1-j^2 r^2)^2 + (2\zeta j r)^2}} \cos(j\omega t - \varphi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j/k}{\sqrt{(1-j^2 r^2)^2 + (2\zeta j r)^2}} \sin(j\omega t - \varphi_j)$$

$$\varphi_j = \arctan\left(\frac{2\zeta j r}{1 - j^2 r^2}\right) \qquad x_p(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau)\; d\tau$$

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1 \omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1 \omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2}$$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right), \quad \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \delta = 2\pi\zeta \text{ para } \zeta \ll 1$$

$$Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs} \qquad \boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F_0} \qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1} \boldsymbol{F_0}$$

$$\boldsymbol{Z}(i\omega) = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

End Conditions of Bar	Boundary Conditions	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Natural Frequencies
Fixed-free	$u(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Free-free	$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Fixed-fixed	$u(0, t) = 0$ $u(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$