ATENÇÃO

1. A prova será feita em grupos de até 4 pessoas. Os grupos podem comunicar-se internamente, é claro, mas não deve haver comunicação entre grupos distintos.
2. A divisão do trabalho dentro de cada grupo fica a critério do próprio grupo. Todos do grupo terão a mesma nota.
3. A prova é competitiva e o tempo de entrega da prova é um fator para a nota. Após a correção, será multiplicado à nota total das questões um fator de correção, que é igual a 1.0 para o primeiro grupo e 0.75 para o último grupo que entregar a prova, sendo interpolado linearmente para os grupos intermediários. Organizem o trabalho portanto de forma que possam fazê-la no menor tempo possível.
4. A prova pode, e provavelmente é a melhor maneira, entregue em folhas escritas por pessoas diferentes, mas as folhas devem ser numeradas em ordem de correção. Não vão ser consideradas provas que não puderem ser corrigidas devido a desorganização.
5. O nome do grupo deve estar escrito em todas as folhas de prova. NÃO PERCAM TEMPO DISCUTINDO O NOME DO GRUPO. Peguem as inicias dos nomes ou algo rápido assim.
6. Entregue esta folha preenchida junto com as folhas de respostas.

NOME DO GRUPO: ____________________________________

INTEGRANTES

1) ____
2) ____
3) ____
4) ____

1) Uma analista de dinâmica estrutural determinou que as matrizes de massa, rigidez e flexibilidade para um sistema são, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 2,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12.0 & -2.5 & 0.0 & -2.5 \\ -2.5 & 10.0 & -3.0 & -4.5 \\ 0.0 & -3.0 & 21.0 & -18.0 \\ -2.5 & -4.5 & -18.0 & 32.0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0.1032 & 0.0562 & 0.0419 & 0.0395 \\ 0.0562 & 0.1831 & 0.1004 & 0.0866 \\ 0.0419 & 0.1004 & 0.1484 & 0.1009 \\ 0.0395 & 0.0866 & 0.1009 & 0.1032 \end{bmatrix}.$$

Ela também determinou os autovetores e autovalores da matriz dinâmica, que são, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} -0.2750 & -0.8330 & 0.4871 & -0.0700 \\ -0.5763 & -0.3967 & -0.8407 & -0.1280 \\ -0.6031 & 0.3634 & 0.2199 & -0.3727 \\ -0.4779 & 0.1284 & 0.0864 & 0.9163 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1.033508 \\ 0.223317 \\ 0.157525 \\ 0.062281 \end{bmatrix}.$$

Cada linha do vetor de autovalores é o autovalor correspondente ao autovetor armazenado na coluna de mesmo número da matriz de autovetores. Prossiga agora com a análise, seguindo os passos a seguir:

a) Verifique a ortogonalidade de um (apenas um, não faça para todos!) autovetor em relação às matrizes de massa e rigidez.

b) Quais são as frequências naturais do sistema? Qual é a frequência fundamental?

c) Para o primeiro modo normal, calcule os coeficientes de massa e rigidez generalizados.

d) Normalize o primeiro modo, de forma que o coeficiente de massa generalizada seja unitário. Calcule o coeficiente de rigidez generalizada com o modo normalizado desta forma, e compare-o com a frequência natural correspondente.

e) Suponha que o sistema esteja vibrando apenas no primeiro modo, com a maior amplitude de vibração que ocorre no sistema igual a 1. Suponha a mesma coisa, agora admitindo que o sistema vibra no quarto modo. Compare as energias potenciais elásticas nos dois casos.

O valor desta questão é 5.0 pontos.

2) Uma barra rígida horizontal de comprimento L, com massa m, é suportada na extremidade esquerda por uma mola de rigidez $2k$ e na extremidade direita por uma mola de rigidez k. Derive as equações de movimento em termos dos deslocamentos verticais das extremidades. Escreva as equações na forma matricial. Determine as frequências naturas do sistema e os modos normais. Normalize os modos de forma que a amplitude máxima em cada um seja unitária, e faça um esquema de cada um dos modos.

O valor desta questão é 5.0 pontos.

Formulário no verso.

$\omega=2\pi f$ $\quad f=\frac{1}{\tau}$ $\quad T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,\quad T=\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2,\quad U=\frac{1}{2}\kappa x^2,\quad U=\frac{1}{2}F\,x$ $\quad k_t=\frac{GJ}{l}$

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k_t}{J_0}},\quad \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\quad \zeta=\frac{c}{c_c},\quad c_c=2m\omega_n$ $\quad \delta_{st}=\frac{F_0}{k}$ $\quad J_0=\frac{1}{2}mR^2$

$$x(t)=X\,e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi),\ X=\frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2+\dot{x}_0^2+2x_0\dot{x}_0^2\zeta\omega_n}}{\omega_d},\ \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\ \varphi=\arctan\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{x_0\omega_d}\right)$$

$\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ $\quad \delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right),\quad \delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},\quad \delta=2\pi\zeta \text{ para } \zeta\ll 1$

$Z_{rs}(i\omega)=-\omega^2 m_{rs}+i\omega c_{rs}+k_{rs}$ $\quad \boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F_0}$ $\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1}\boldsymbol{F_0}$ $\quad \boldsymbol{Z}(i\omega)=\begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega)\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$ $\quad c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $\quad c=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ $\quad \alpha\tan\alpha=\beta$ $\quad \alpha=\frac{\omega l}{c}$ $\quad \beta=\frac{m}{M}$ $\quad \beta=\frac{J_{\text{barra}}}{I_0}$

$$r_1=\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}}=\frac{-m_1\omega_1^2+(k_1+k_2)}{k_2}$$

$$r_2=\frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}=\frac{-m_1\omega_2^2+(k_1+k_2)}{k_2}$$

$$[m]\ddot{\vec{x}}+[c]\dot{\vec{x}}+[k]\vec{x}=\vec{F}$$

$$\left[[k]-\omega^2[m]\right]\vec{X}=\vec{0}$$

$$M_{ii}=\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)},\qquad i=1,2,\ldots,n$$

$$K_{ii}=\vec{X}^{(i)T}[k]\vec{X}^{(i)},\qquad i=1,2,\ldots,n$$

$$T=\frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[m]\dot{\vec{x}}$$

$$V=\frac{1}{2}\vec{x}^T[k]\vec{x}$$

$$\lambda[I]\vec{X}=[D]\vec{X}$$

$$[D]=[k]^{-1}[m]$$

$$\lambda=\frac{1}{\omega^2}$$