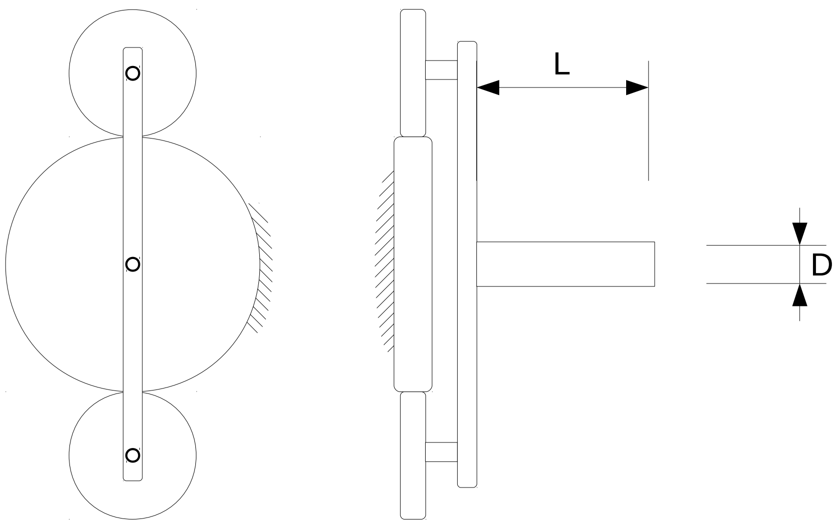
1) A figura mostra um esquema da parte interna de um trem planetário. A engrenagem central, o sol, é fixa e tem 100 dentes. As engrenagens que orbitam em torno do sol são os planetas, e tem 40 dentes. Os diâmetros primitivos do sol e dos planetas são 80 mm e 32 mm, respectivamente. A largura da face do sol é de 12 mm, e a dos planetas, 10 mm. Perceba que neste caso específico o sol é fixo, e os planetas giram devido a velocidade rotação do braço que é causada pela árvore de entrada. O comprimento da árvore de entrada “L” é de 85 mm. O braço que conecta os planetas tem seção retangular com área igual a 65 mm² e comprimento igual a 140 mm. Ele deve ser considerado rígido, porém com inércia importante. Os eixos que conectam os planetas ao braço são muito curtos e devem ser desconsiderados de qualquer análise dinâmica. *Nesta configuração particular*, podemos determinar facilmente que a velocidade dos planetas é 1.5 vezes a velocidade da árvore de entrada, na direção oposta é claro. Todos os componentes são feitos com aço com massa específica igual a 7.700 Kg/m³, módulo de Young igual a 210 GPa e módulo de cisalhamento igual a 80 Gpa. O momento de inércia de massa de um cilindro de massa “m” e raio “R” é $m R^2/2$ e o momento de inércia de área é $\pi R^4/2$. Considerando que a extremidade direita da árvore esteja impedida de girar, determine o diâmetro da árvore para que a frequência natural do sistema seja no mínimo 30 vezes a frequência correspondente à velocidade de operação, que é 2000 rpm. Considere que a árvore seja flexível à torção, mas que sua inércia seja desprezível. (Valor 5 pontos)

2) Suponha que no sistema da questão anterior seja aplicada uma rotação inicial do braço, de muito pequena amplitude (considerando ainda a extremidade direita engastada), e, depois de 1000 ciclos, a amplitude de vibração é ainda metade da amplitude aplicada inicialmente. Qual o valor do amortecimento do sistema? (Valor 2 pontos).

3) Se na extremidade direita da árvore é aplicado um deslocamento angular harmônico, de amplitude igual a 0.05 graus, de frequência correspondente a 6000 rpm, qual é a amplitude de vibração do braço? Considere o sistema com o amortecimento calculado na segunda questão. Supondo que a frequência de oscilação seja variável, qual é, aproximadamente, a maior amplitude de vibração que pode ocorrer no sistema? (Valor 3 pontos).



$$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{\tau} \qquad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2, \quad U = \frac{1}{2} \kappa x^2, \quad U = \frac{1}{2} F x \qquad k_t = \frac{GJ}{L}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}}, \quad \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n, \quad \zeta = \frac{c}{c_c}, \quad c_c = 2m\omega_n \qquad \delta_{st} = \frac{F_0}{k}$$

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \varphi), X = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2 + \dot{x}_0^2 + 2x_0\dot{x}_0^2\zeta\omega_n}}{\omega_d}, \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n, \varphi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{x_0\omega_d}\right)$$

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right), \quad \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \delta = 2\pi\zeta \text{ para } \zeta \ll 1$$

$$T_d = \frac{X}{Y} = \left(\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \frac{Mx}{me} = r^2 |H(i\omega)|, \varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

$$H(i\omega) = \frac{1}{(1-r^2) + i\,2\zeta r}, |H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \frac{F_T}{\kappa Y} = r^2\left(\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}}\cos(j\omega t - \varphi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}}\sin(j\omega t - \varphi_j)$$

$$\varphi_j = \arctan\left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right) \qquad x_p(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau$$

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right), \quad \delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \delta = 2\pi\zeta \text{ para } \zeta \ll 1$$