2016.1 -- EE01

Questão 1

```
Dsol = 80e-3
Dplt = 32e-3
hplt = 10e-3
rho = 7700
G = 210e9
```

```
rp = (Dsol+Dplt)/2
rp
```

$$0.0560000000000000$$

Massa do planeta

```
A = N(pi*Dplt^2/4)
V = A * hplt
m = rho*V
(m, V, A)
```

$$\left(0.0619270743875620, 8.04247719318987 \times 10^{-6}, 0.000804247719318987\right)$$

Massa do braço

```
Ab = 65e-6
lb = 140e-3/2
Vb = Ab*lb
mb = rho*Vb
(mb, Vb, Ab)
```

$$\left(0.0350350000000000, 4.55000000000000 \times 10^{-6}, 0.0000650000000000000\right)$$

Massa equivalente do planeta.

A energia cinética do planeta é devida à rotação e a translação do planeta.

$$Tp = \frac{1}{2} m v_{\text{plt}}^2 + \frac{1}{2} J_{\text{plt}} \dot{\theta}_{\text{plt}}^2$$

O centro de massa do planeta está localizado na soma dos raios do planeta e do sol, portanto a velocidade do centro de massa do planeta é

$$v_{\text{plt}} = \dot{\theta}_b r_p,$$

onde θ_b é a velocidade angular do braço.

Do enunciado, a velocidade do planet é 1,5 vezes a velocidade do braço (para energia cinética a direção não importa.) Assim,

$$\dot{\theta}_{\text{plt}} = R\dot{\theta}_b,$$

onde R é a razão de velocidades.

Introduzindo estes termos na expressão para energia cinética, temos

$$T_p = \frac{1}{2}\left(mr_p^2 + J_p R^2\right)\dot{\theta}_b^2.$$

A energia cinética considerando como coordenada generalizada a rotação do braço é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_b^2.$$

Igualando as duas expressões, é claro que

$$J_{\text{eq}} = mr_p^2 + J_p R^2.$$

O momento de inércia de massa de um cilindro é $mR_c^2/2$,

```
Jp = 0.5*m*(Dplt/2)^2
Jp
```

$$7.92666552160794 \times 10^{-6}$$

```
Jeqp = m*(Dplt/2)^2 + Jp*(1.5)^2
Jeqp
```

$$0.0000336883284668337$$

Massa equivalente do braço

O braço é rígido, mas tem inércia.

Vamos considerar apenas pequenas rotações, e portanto podemos calcular o momento de inércia em relação ao centro do planetário exatamente como fizemos em sala de aula, considerando meio braço (depois vou multiplicar tudo por dois). Quem lembrar da fórmula do momento de inércia de uma barra em relação a sua extremidade $(mL^2/3)$ pode usá-la diretamente.

```
Jb = mb * lb^2/3
Jb
```

0.0000572238333333333

Momento de inércia equivalente total

O momento de inércia equivalente total é então

```
Jeq = 2*(Jb+Jeqp)
Jeq
```

0.000181824323600334

Limite para a frequência natural

```
oper = 2000 #rpm
roper = oper*2*pi/60
wmin = N(30 * roper)
(wmin, N(roper))
```

$(6283.18530717959, 209.439510239320)$

A frequência natural para um sistema rotativo é dada por $\omega_n = \sqrt{k_t/J_{\mathrm{eq}}}$. A menor rigidez em torção aceitável é então $k_t = \omega_n^2 J_{\mathrm{eq}}$.

```
kt = wmin^2*Jeq
kt
```

7178.13657772381

Cálculo do diâmetro

Para um cilindro, a rigidez torcional é $k_t = GJ/L$, então, no caso, temos

```
G = 80e9
L = 160e-3
```

O momento de área necessário é então

```
J = kt*L/G
J
```

$$1.43562731554476 \times 10^{-8}$$

Como para um círculo $J = \pi r^4/2$, temos

```
r4 = N(2*J/pi)
r = r4^(1/4)
(r, r4)
```

$$\left(0.00977755930920933, 9.13948734826789 \times 10^{-9}\right)$$

Então uma árvore com aproximadamente 20 mm de diâmetro é suficiente.

Questão 2

A fórmula do decremento logarítmico é

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right),$$

então, no caso,

```
n = 1000
x1 = 1
x1000 = 0.5
delta = 1/n*ln(1/0.5)
delta
```

$$0.000693147180559945$$

Como o delta é muito pequeno, podemos usar a fórmula simples, $\delta = 2\pi\zeta$, assim,

```
zeta = delta/(2*N(pi))
zeta
```

$$0.000110317800076326$$

Temos que $c = c_c\zeta$, e para sistemas rotativos, $c_c = 2J_{\text{eq}}\omega_n$, assim

```
cc = 2*Jeq*wmin
c = zeta*cc
(c, cc)
```

$(0.000252062034521581, 2.28487183706697)$

Questão 3

Este é um problema de vibração forçada, com excitação harmônica, com *movimento da base*. Este é o caso típico, na prática, do estudo da vibração torcional causada por motores de combustão interna ou máquinas rotativas em geral. Neste caso, a amplitude de vibração de entrada é dada como 0.05°. Podemos usar graus como unidade pois isto é apenas um fator multiplicativo da amplitude, se convertermos para radianos e convertermos de volta no final, dá no mesmo.

A frequência da excitação é 6000 rpm. Isto precisamos converter para rad/s com certeza!

```
A0 = 0.05
w0 = N(6000 * pi/30)
print(A0, w0)
```

```
(0.0500000000000000, 628.318530717959)
```

Do formulário, a transmissibilidade de deslocamento é dada por:

$$T_d = \frac{X}{Y} = \left(\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Na fórmula acima, X é a resposta procurada e Y é o deslocamento da base, que é dado no caso atual. A razão de amortecimento é aquela calculada na questão 2, e a razão de frequências r pode ser calculada facilmente, pois a frequência de excitação é dada e a frequência natural foi calculada na primeira questão. Assim, temos:

```
Y=0.05
wn = wmin
print(zeta, wn)
```

```
(0.000110317800076326, 6283.18530717959)
```

```
r = w0/wn
print(r)
```

```
0.100000000000000
```

A transmissilibadade de deslocamento é então

```
Td = sqrt((1+(2*zeta*r)^2)/((1-r^2)^2+(2*zeta*r)^2))
show(Td)
```

$$1.01010101009602$$

A amplitude de vibração é então

```
X = Y*Td
show(X)
```

$$0.0505050505048009$$

Que é praticamente a mesma, pois estamos muito abaixo da frequência natural.

Como ζ é muito baixo, podemos considerar que a maior amplitude ocorre na ressonância $r = 1$, sendo igual a

$$X_{\max} = Y * \sqrt{\frac{1+4\zeta^2}{4\zeta^2}} \approx Y * \frac{1}{2\zeta}$$

No caso então,

```
Tdr = 1/(2*zeta)
Xmax = Y*Tdr
print(Xmax, Tdr)
```

```
(226.618007091360, 4532.36014182719)
```

Perceba que na ressonância, a amplitude seria de 226°, o que destruiria qualquer sistema mecânico real!

```

```