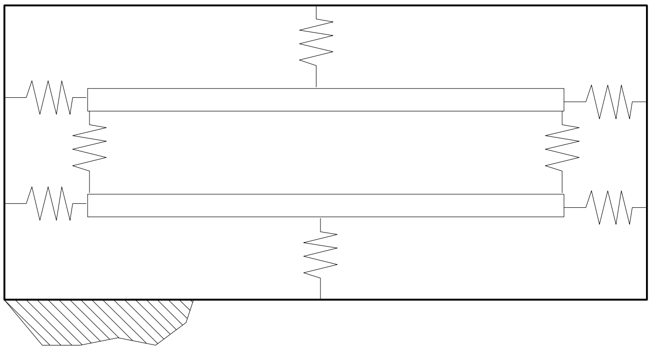
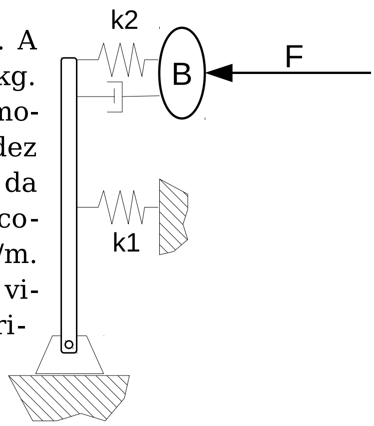
Vibrações Mecânicas **Exame Final** **1º Semestre de 2016**

1) Quantos graus de liberdade possui o sistema mostrado na figura? As barras são rígidas, tem massa m , comprimento l e momento de inércia em relação ao centro de gravidade igual a $ml^2/12$. Todas as molas tem rigidez k . Escolha um conjunto de coordenadas generalizadas apropriado e determine as matrizes de massa e rigidez. *Valor 3.0 pontos.)*



2) A figura ao lado mostra a posição de equilíbrio do sistema. A barra vertical tem comprimento igual a 1 m e massa igual a 4 kg. O bloco *B* pode ser considerado com massa concentrada e tem movimento horizontal apenas, e sua massa é igual a 3 kg. A rigidez da mola k1 é igual a 10^6 N/m, e ela esta aplicada a meia altura da barra, enquanto a mola k2 tem rigidez igual a $0.33\text{x}10^6$ N/m. O coeficiente de amortecimento do amortecedor é igual a 240 Ns/m. Calcule as frequências naturais do sistema, e a amplitude de vibração quando o bloco à direita está submetido a um força horizontal harmônica, de amplitude igual a 1750 N e frequência igual a 65 Hz. *(Valor 4.0 pontos.)*



3) Um motor elétrico de velocidade variável está montado sobre um isolador de vibração. O motor tem um certo desbalanceamento rotativo, e verifica-se que, durante a operação, quando a frequência do motor é aumentada a partir de zero, a amplitude máxima de vibração é igual a 14 mm, mas, quando operado a velocidades muito altas, a amplitude de vibração é de apenas 3,9 mm. Qual é a razão de amortecimento do amortecedor de vibração? *(Valor 3.0 pontos.)*

Formulário no verso.

$$\omega=2\pi f \qquad f=\frac{1}{\tau} \qquad T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,\quad T=\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2,\quad U=\frac{1}{2}\kappa x^2,\quad U=\frac{1}{2}Fx \qquad k_t=\frac{GJ}{l}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k_t}{J_0}},\quad \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\quad \zeta=\frac{c}{c_c},\quad c_c=2m\omega_n \qquad \delta_{st}=\frac{F_0}{k} \qquad J_0=\frac{1}{2}mR^2$$

$$x(t)=X e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi),\ X=\frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2+\dot{x}_0^{\,2}+2x_0\dot{x}_0^{\,2}\zeta\omega_n}}{\omega_d},\ \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\ \varphi=\arctan\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{x_0\omega_d}\right)$$

$$T_d=\frac{X}{Y}=\left(\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \qquad \frac{Mx}{me}=r^2|H(i\omega)|,\ \varphi=\arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

$$H(i\omega)=\frac{1}{(1-r^2)+i2\zeta r},\ |H(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \qquad \frac{F_T}{\kappa Y}=r^2\left(\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_p(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2+(2\zeta jr)^2}}\cos(j\omega t-\varphi_j)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2+(2\zeta jr)^2}}\sin(j\omega t-\varphi_j)$$

$$\varphi_j=\arctan\left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right) \qquad x_p(t)=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\ d\tau$$

$$\delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right),\quad \delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},\quad \delta=2\pi\zeta \text{ para } \zeta\ll 1$$

$$Z_{rs}(i\omega)=-\omega^2 m_{rs}+i\omega c_{rs}+k_{rs} \qquad \boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F_0} \qquad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1}\boldsymbol{F_0} \qquad \boldsymbol{Z}(i\omega)=\begin{bmatrix}Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega)\\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix} \qquad c=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad c=\sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad \alpha\tan\alpha=\beta \qquad \alpha=\frac{\omega l}{c} \qquad \beta=\frac{m}{M} \qquad \beta=\frac{J_{\text{barra}}}{I_0}$$

$$r_1=\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}}=\frac{-m_1\omega_1^2+(k_1+k_2)}{k_2}$$

$$r_2=\frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}=\frac{-m_1\omega_2^2+(k_1+k_2)}{k_2}$$

$$\lambda[I]\vec{X}=[D]\vec{X}$$

$$[D]=[k]^{-1}[m]$$

$$\lambda=\frac{1}{\omega^2}$$

$$[m]\ddot{\vec{x}}+[c]\dot{\vec{x}}+[k]\vec{x}=\vec{F}$$

$$\big[[k]-\omega^2[m]\big]\vec{X}=\vec{0}$$

$$T=\frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[m]\dot{\vec{x}}$$

$$V=\frac{1}{2}\vec{x}^T[k]\vec{x}$$

$$M_{ii}=\vec{X}^{(i)T}[m]\vec{X}^{(i)},\qquad i=1,2,\ldots,n$$

$$K_{ii}=\vec{X}^{(i)T}[k]\vec{X}^{(i)},\qquad i=1,2,\ldots,n$$