# Vibrações 2015.2 3º EE

# Questão 1)

Basta fazer os gráficos abaixo, lembrando que a vibração é unidimensional:

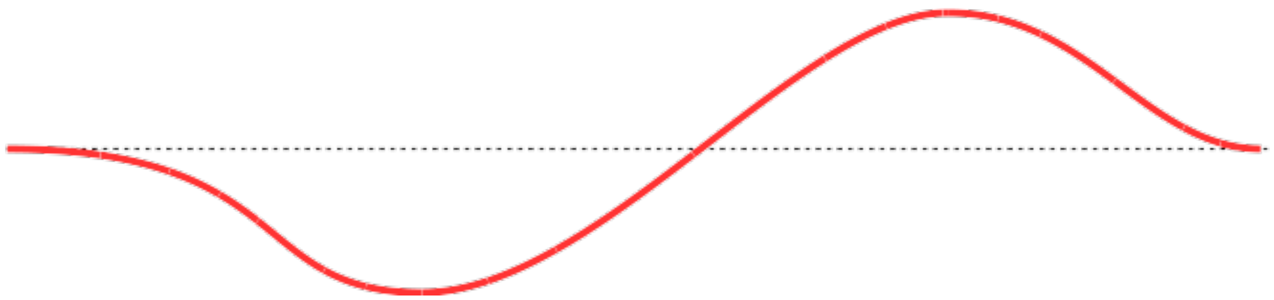
## a) Primeiro modo de um arame flexível com uma extremidade livre

As condições de contorno são: $y(0) = 0$ e $\left.\frac{dy}{dx}\right|_l = 0$. A forma gerá é algo como (na realidade é exatamente uma meia senoide, como pode ser visto da tabela no final do formulário):

É importante que a derivada seja zero à direita e diferente de zero à esquerda.

## b) Segundo modo normal de uma viga biengastada.

As condições de contorno devem ser: $y(0) = 0$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_0 = 0, y(l) = 0$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_l = 0$. A forma gerá é algo como



O importante aqui é que haja um nó no meio, que as extremidades não se desloquem e que a as derivadas seja nulas nas extremidades. A resposta verdadeira é simétrica, é claro, mas esta aqui eu fiz na mão!

## c) Primeiro modo normal de uma viga livre-livre.

As condições de contorno devem ser momento fletor e cortante nulos nas duas extremidades, isto é

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_0 = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_l = \left.\frac{d^2y}{dx^3}\right|_0 = \left.\frac{d^2y}{dx^3}\right|_l = 0.$$

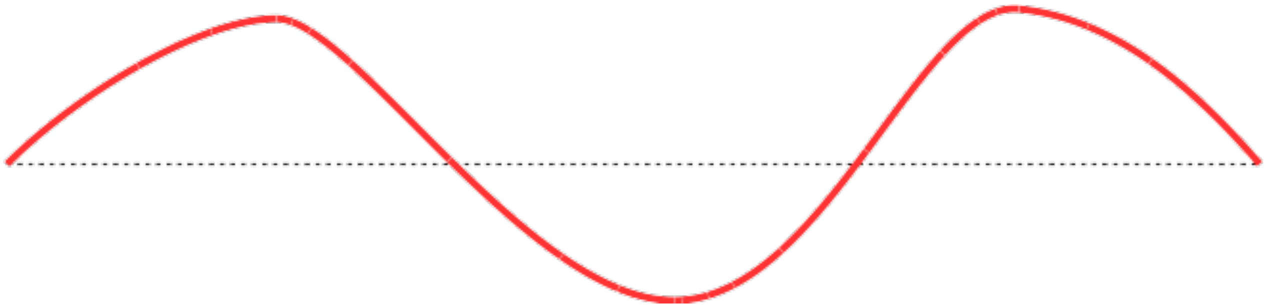
O jeitão do modo é

O importante é ter dois nós e as extremidades livres

## d) Terceiro modo de um arame flexível fixo-fixo.

As condições de contorno são: $y(0) = y(l) = 0.$

O jeitão é



Obviamente deveria ser simétrica em relação ao centro do fio, e em cada meio ciclo, pois são três meio-senos. O importante aqui é ter três nos, ter deslocamento nulo e derivada não nula nas extremidades.

# Questão 2

É óbvio que o melhor sistema de coordenadas para descrever este sistema são os deslocamentos horizontais dos centros dos cilindros em relação às suas respectivas posições de equilibrio.

Desta forma, precisamos calcular as massas equivalentes dos cilindros para translação.

A esta altura do campeonato, esperar-se-ia que alguém que tivesse feito exercícios o suficiente soubesse de cabeça que a inércia rotativa do cilindro acrescenta metade da massa. A demonstração é óbvia, através das equivalências de energias cinéticas

$$T = \frac{1}{2} m_\text{eq} v^2 = \frac{1}{2} J_0 \dot\theta^2$$

Como o cilindro gira sem deslizar, $v = \dot\theta R$, então

$$m_\text{eq} v^2 = J_0 \frac{v^2}{R^2} \rightarrow m_\text{eq} = \frac{J_0}{R^2}$$

Mas, para um cilindro, $J_0 = \frac{1}{2} m R^2$, como era de se esperar que as pessoas soubessem de cabeça, mas era dado no formulário de qualquer jeito. Assim,

$$m_\text{eq} = \frac{1}{2} \frac{m R^2}{R^2}$$

Ou, é claro,

$$m_\text{eq} = \frac{1}{2} m$$

Neste caso, a massa do cilindro é 1,5 kg, então

```
mcil = 1.5
meq = 1.5*mcil
print(meq)
```

```
2.25000000000000
```

Vamos chamar de massa 1 a massa à esquerda. A equação de movimento para a massa 1 é

$$m_\text{eq} \ddot x_1 + c(\dot x_1 - \dot x_2) + k x_1 = 0$$

e para a massa 2

$$m_\text{eq} \ddot x_2 - c(\dot x_1 - \dot x_2) + k x_2 = 0$$

Ou, na forma matricial,

```
\begin{equation*}
\begin{bmatrix}
m_\text{eq} & 0 \\
0 & m_\text{eq}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\ddot x_1 \\
\ddot x_2 \\
\end{bmatrix} +
\begin{bmatrix}
c & -c \\
```

```
-c & c \\
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\dot x_1 \\
\dot x_2 \\
\end{bmatrix} +
\begin{bmatrix}
k & 0 \\
0 & k
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
f_1(t) \\
f_2(t) \\
\end{bmatrix}
\end{equation*}
```

$$\begin{bmatrix} m_\text{eq} & 0 \\ 0 & m_\text{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

Percebam que, interessantemente e como era de se esperar, o sistema só tem acoplamento dinâmico, e devido à velocidade apenas. Lembre-se também que $f_1(t)$ é harmônica é que $f_2(t) = 0$.

Precisamos calcular os termos da matriz de impedância mecânica. Os termos desta matriz são

$$Z(i\omega)_{rs} = k_{rs} - m_{rs}\omega^2 + ic\omega$$

Neste caso, a matriz de impedância mecânica é

```
\begin{equation*}
\begin{bmatrix}
k - m_\text{eq} \omega^2 + ic\omega & -ic\omega \\
-i c \omega & k - m_\text{eq} \omega^2 + ic\omega
\end{bmatrix}
\end{equation*}
```

$$\begin{bmatrix} k - m_\text{eq}\omega^2 + ic\omega & -ic\omega \\ -ic\omega & k - m_\text{eq}\omega^2 + ic\omega \end{bmatrix}$$

No caso temos:

```
k=3000
f=280
w=N(2*pi*f)
print(w)
```

```
c=0.15
```

    1759.29188601028

```
Z = Matrix([[k-meq*w^2+I*c*w, -I*c*w],[-I*c*w,k-meq*w^2+I*c*w]])
print(A)
```

    [-6.96099286540865e6 + 263.893782901543*I
    -263.893782901543*I]
    [                     -263.893782901543*I -6.96099286540865e6 +
    263.893782901543*I]

Meu plano original era que a força de inércia fosse muito próxima da força elástica, então estaríamos próximos da ressonânica. Obviamente, eu errei alguma conta na hora de escolher os valores, pois a força de inércia ($m\omega^2$) está ridiculamente maior do que as outras e vai ofuscar todos os outros efeitos. Provavelmente não vamos ter deslocamento mensurável. Ainda assim, vamos continuar com o cálculo.

O determinante de matriz de impedância mecânica é

```
detz = Z[0,0]*Z[1,1]-Z[1,0]^2
print(detz)
```

    4.84554216722701e13 - 3.67392548000667e9*I

Ou, é claro, usando a operação matricial direta

```
print(Z.det())
```

    4.84554216722701e13 - 3.67392548000667e9*I

A inversa "na mão" é

```
Zinv = 1/detx*Matrix([[Z[1,1] , -Z[1,0]],[-Z[1,0] , Z[0,0]]])
print(Zinv)
```

    [ -1.43657667298428e-7 - 5.44611464057271e-12*I
    -4.12928391798268e-16 + 5.44611464057271e-12*I]
    [-4.12928391798268e-16 + 5.44611464057271e-12*I
    -1.43657667298428e-7 - 5.44611464057271e-12*I]

É claro que podemos também fazer isto diretamente:

```
Zinv=Z.inverse()
print(Zinv)
```

    [ -1.43657667298428e-7 - 5.44611464057271e-12*I
    -4.12928391798268e-16 + 5.44611464057271e-12*I]
    [-4.12928391798268e-16 + 5.44611464057271e-12*I
    -1.43657667298428e-7 - 5.44611464057271e-12*I]

O vetor de forças é

```
F = vector([6.0, 0.0])
```

As respostas são então

```
X = Zinv*F
print(X)
```

```
(-8.61946003790569e-7 - 3.26766878434363e-11*I,
-2.47757035078961e-15 + 3.26766878434362e-11*I)
```

Claro que o sistema computacional aqui fez, automaticamente, a conversão

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Como fizemos inúmeras vezes ao longo do curso.

Os dois deslocamentos são fasores, quer giram com frequência 280 Hz. A distância entre as massas é diferença entre as posições, que é dada pela diferença entre estes fasores, que também é um fasor que gira com frequência de 180 Hz, cuja magnitude é

```
delta = X[0] - X[1]
print(delta)
print(delta.abs())
```

```
-8.61946001312999e-7 - 6.53533756868725e-11*I
8.61946003790569e-7
```

Como previsto o amortecimento não teve influência alguma, e a segunda massa está efetivamente parada....

Para movimento harmônico, as velocidades são dadas por $i\omega X$. Multiplicando os deslocamentos por $i\omega$, obtemos

```
V = I*w*X
print(V)
```

```
(5.74878317846483e-8 - 0.00151641461064774*I, -5.74878317846483e
4.35876941516381e-12*I)
```

As magnitudes das velocidades são então:

```
V1 = V[0].abs()
V2 = V[1].abs()
print(V1, V2)
```

```
(0.00151641461173743, 5.74878319498908e-8)
```

A maior velocidade é a da massa 1, com 1,5 mm/s. A massa 2 está parada, como tínhamos previsto, infelizmente!

# Questão 3

Todo este carnaval no enunciado é para dizer que os cabos tem vibração lateral apenas e estão tracionados pelo força centrífuga causada pelas massas nas pontas.

A força centrífuga é dada por $m\omega^2 R$. Como as massas e a outra extremidade do cabo não podem deslocar-se lateralmente, temos um problema de vibração lateral de cabos com as duas extremidades fixas.

Quem estudou um pouco sabe que a equação que modela o problema de vibração lateral é exatamente a mesma que modela o problema de vibração longitudinal em barras, cujas fórmulas são dadas na prova. Desta forma podemos

pegar da tabela a última fórmula para frequências naturais, isto é:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$$

Para vibração transversal de cabos, a velocidade do som é dada por

$$c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

Infelizmente esta fórmula não estava no formulário. Isto pode ter causado alguma confusão, e eu serei **extremamente** generoso na correção desta questão por causa disto, desde que a pessoa tenha feito qualquer coisa que faça algum sentido físico.

Neste caso, é óbvio que $P = m\omega^2$, que, inserido na fórmula para a velocidade, dá:

$$c = \sqrt{\frac{m\omega^2 R}{\rho}} = \omega\sqrt{\frac{mR}{\rho}}$$

Vai haver ressonância quando a frequência de rotação do disco for igual a alguma frequência natural do fio, isto é $\omega = \omega_n$. Isto implica em:

$$\omega = \frac{n\pi}{l}c = \frac{n\pi}{l}\omega\sqrt{\frac{mR}{\rho}}$$

Ou

$$1 = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{mR}{\rho}}$$

Todo mundo é conhecido nesta equação menos o $n$. Para colocar valores numéricos, precisamos lembrar que a densidade que aparece nesta fórmula é a densidade linear.

```
rhov = 7700
d = 0.0015
A = N(pi*d^2/4)
rho = A*rhov
print(rho)
```

0.0136070231808608

```
m=0.25
R=1
l=0.90
```

```
T=N(pi)/l*sqrt(m*R/rho)
show(T)
```

$14.9622120442443$

```
n=1/T; show(n)
```

$0.0668350372954836$

Como isto não deu um valor inteiro, não há risco de ressonância para esta combinação de fatores.