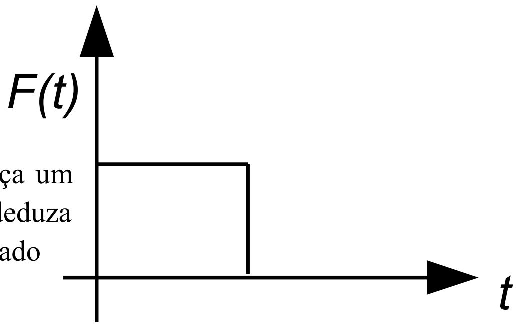
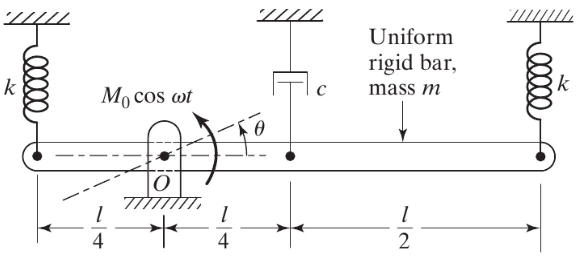
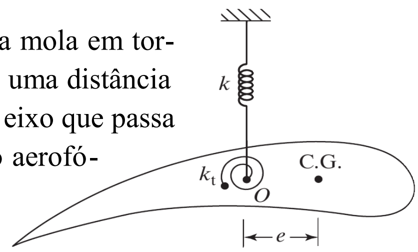
Vibrações Mecânicas **Exame Final** **2º Semestre de 2015**



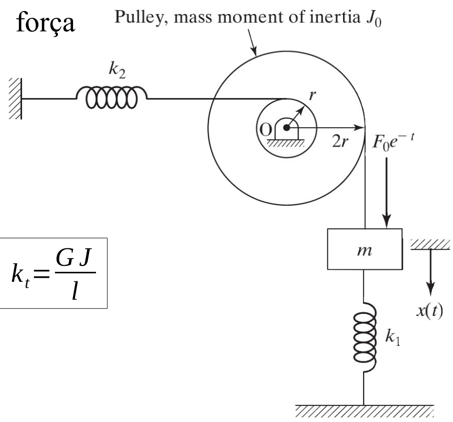
1) Considere um oscilador harmônico que é submetido a uma carga tipo função degrau, como mostrada ao lado, partindo do repouso em sua posição de equilíbrio. Suponha que a duração do degrau seja de alguns períodos do sistema, e que o sistema tenha amortecimento alto, porém ainda subcrítico. Faça um gráfico de como é a resposta do sistema. Não faça contas, não deduza fórmulas, não faça nada além do que é estritamente requisitado neste enunciado. *(Valor 2.0 pontos)*



2) Derive as equações de movimento e encontre a resposta no regime permanente para o sistema mostrado ao lado, considerando que a coordenada generalizada de interesse é a rotação em torno do pivô, e que $k=5000\ \text{N/m}$, $l=1\ \text{m}$, $c=1000\ \text{N-s/m}$, $M_0=100\ \text{N-m}$, $\omega=1000\ \text{rpm}$ *(Valor 2.0 pontos)*



3) Um aerofólio instalado em um túnel de vento tem de massa *m* está suspenso por uma mola linear de rigidez *k* e uma mola em torção de rigidez k_t. O centro de gravidade do aerofólio localiza-se a uma distância *e* do ponto *O*. O momento de inércia do aerofólio em torno de um eixo que passa por *O* é J_0. Encontre as frequências naturais e modos normais do aerofólio. (Valor 3.0 pontos)



4) Encontre a resposta mostrada na figura ao lado, submetida à força $F(t)=F_0e^{-t}$, onde $k_1=1000\ \text{N/m}$, $k_2=550\ \text{N/m}$, $r=55\ \text{mm}$, $m=10\ \text{kg}$, $J_0=1\ \text{kg-m}^2$ e $F_0=50\ \text{N}$. Considere que o cabo que liga a massa à polia é inextensível. (Valor 3.0 pontos)

$\omega=2\pi f$ $\quad$ $f=\frac{1}{\tau}$ $\quad$ $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,\quad T=\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2,\quad U=\frac{1}{2}\kappa x^2,\quad U=\frac{1}{2}F x$ $\quad$ $k_t=\frac{GJ}{l}$

$$x(t)=A\cos(\omega_n t-\phi),\quad A=\sqrt{x_o^2+(\dot{x}_0/\omega_n)^2},\quad \phi=\arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n}\right)$$

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k_t}{J_0}},\quad \omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\quad \zeta=\frac{c}{c_c},\quad c_c=2m\omega_n$ $\quad$ $\delta_{st}=\frac{F_0}{k}$ $\quad$ $J_0=\frac{1}{2}mR^2$

$$x(t)=X e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t-\phi),X=\frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2+\dot{x}_0{}^2+2x_0\dot{x}_0{}^2\zeta\omega_n}}{\omega_d},\omega_d=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\phi=\arctan\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{x_0\omega_d}\right)$$

$\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ $\quad$ $\delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right),\quad \delta=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},\quad \delta=2\pi\zeta \text{ para } \zeta\ll 1$

Prof. Ramiro Willmersdorf 18/12/2015

$$x(t)=\left[x_0+(\dot{x}_0+\omega_n x_0)\,t\right]e^{-\omega_n t}$$

$$x_p(t)=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)\,e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\;d\tau$$

$$\int_0^x e^{-y}\sin(a(x-y))\,dy=\frac{a\,e^{-x}}{a^2+1}-\frac{a\cos(ax)-\sin(ax)}{a^2+1}$$

$$\frac{M\,x}{m\,e}=r^2|H(i\omega)|,\ \phi=\arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

$$H(i\omega)=\frac{1}{(1-r^2)+i\,2\zeta r},\ |H(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$$\frac{F_T}{\kappa Y}=r^2\left(\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x(t)=C_1 e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}+C_2 e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t},\quad C_1=\frac{x_0\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)+\dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}},\quad C_2=\frac{-x_0\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)-\dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$x_p(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2+(2\zeta jr)^2}}\cos(j\omega t-\phi_j)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2+(2\zeta jr)^2}}\sin(j\omega t-\phi_j)$$

$$\phi_j=\arctan\left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right)$$

$$Z_{rs}(i\omega)=-\omega^2 m_{rs}+i\,\omega\,c_{rs}+k_{rs}$$

$$\boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F_0}$$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1}\boldsymbol{F_0}$$

$$\boldsymbol{Z}(i\omega)=\begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega)\\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\qquad c=\sqrt{\frac{G}{\rho}}\qquad \alpha\tan\alpha=\beta\qquad \alpha=\frac{\omega l}{c}\qquad \beta=\frac{m}{M}\qquad \beta=\frac{J_{\text{barra}}}{I_0}$$

$$\omega_1^2,\ \omega_2^2=\frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1m_2}\right\}\mp\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1m_2}\right\}^2-4\left\{\frac{(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2}{m_1m_2}\right\}\right]^{1/2}$$

$$r_1=\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}}=\frac{-m_1\omega_1^2+(k_1+k_2)}{k_2}$$

$$r_2=\frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}=\frac{-m_1\omega_2^2+(k_1+k_2)}{k_2}$$

End Conditions of Bar	Boundary Conditions	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Natural Frequencies
Fixed-free	$u(0,t)=0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$	$\cos\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=C_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n=\frac{(2n+1)\pi c}{2l}$; $n=0,1,2,\ldots$
Free-free	$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$; $n=0,1,2,\ldots$
Fixed-fixed	$u(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$; $n=1,2,3,\ldots$

$$r_1=\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}}=\frac{-m_1\omega_1^2+(k_1+k_2)}{k_2}=\frac{k_2}{-m_2\omega_1^2+(k_2+k_3)}$$

$$r_2=\frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}}=\frac{-m_1\omega_2^2+(k_1+k_2)}{k_2}=\frac{k_2}{-m_2\omega_2^2+(k_2+k_3)}$$