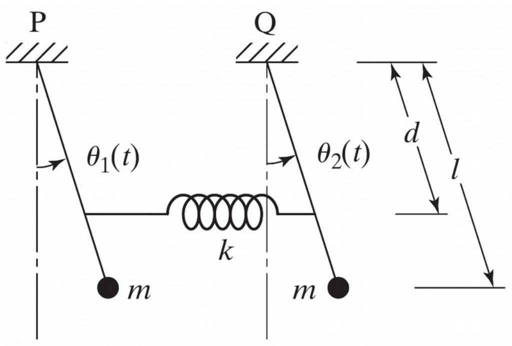
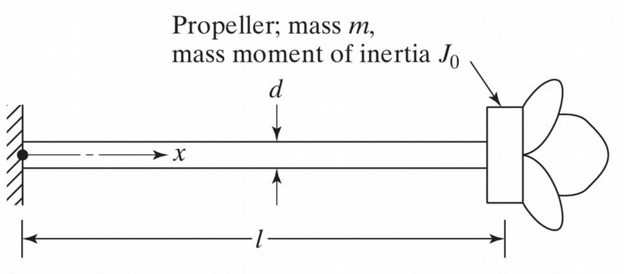
Vibrações Mecânicas **3º EE** **1º Semestre de 2015**

1) Dois pêndulos idênticos, cada um com massa *m* e comprimento *l*, estão conectados por uma mola de rigidez *k* a uma distância *d* do apoio, conforme mostrado na figura ao lado. Escreva as equações de equilíbrio para o problema, encontre as frequências naturais e modos normais do sistema, determine a resposta em vibração livre do sistema para condições iniciais nulas exceto para a inclinação da barra à esquerda, que deve ser igual a θ_0 do sistema e finalmente determine em que condições este sistema exibe o fenômeno de batimento. *(Valor 5 pontos)*



2) Um eixo de aço com diâmetro *d* e comprimento *l* é fixo em uma extremidade e tem montado um propulsor de massa *m* e momento de inércia J_0 na outra extremidade. Determine as primeiras duas frequências (quatro no total então) de vibração axial e em torção, sabendo que d=5cm, l=1m, m=100kg, J_0=10kg-m².O módulo de Young e de cisalhamento do aço são 210 e 80 GPa, respectivamente, e sua massa específica é 7700 kg/m³. (*Valor 5 pontos).*



FÓRMULAS

$\omega = 2\pi f$ $\quad f = \frac{1}{\tau}$ $\quad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2,\quad T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2,\quad U = \frac{1}{2} \kappa x^2,\quad U = \frac{1}{2} F x$ $\quad Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}},\quad \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,\quad \zeta = \frac{c}{c_c},\quad c_c = 2m\omega_n$ $\quad J = \frac{\pi d^4}{64}$ $\quad J_0 = \frac{1}{2} m R^2$ $\quad \boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F_0}$

$k_t = \frac{GJ}{l}$ $\quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1}\boldsymbol{F_0}$ $\quad \boldsymbol{Z}(i\omega) = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $\quad c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ $\quad \alpha \tan\alpha = \beta$ $\quad \alpha = \frac{\omega l}{c}$ $\quad \beta = \frac{m}{M}$ $\quad \beta = \frac{J_{\text{barra}}}{I_0}$

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\} \mp \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\}^2 - 4\left\{\frac{(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2}{m_1 m_2}\right\}\right]^{1/2}$$

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2+(k_1+k_2)}{k_2}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2+(k_1+k_2)}{k_2}$$

	Values of the Mass Ratio β				
	0.01	**0.1**	**1.0**	**10.0**	**100.0**
Value of α_1 $\left(\omega_1 = \dfrac{\alpha_1 c}{l}\right)$	0.1000	0.3113	0.8602	1.4291	1.5549
Value of α_2 $\left(\omega_2 = \dfrac{\alpha_2 c}{l}\right)$	3.1448	3.1736	3.4267	4.3063	4.6658

End Conditions of Bar	Boundary Conditions	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Natural Frequencies
Fixed-free	$u(0, t) = 0$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \dfrac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \dfrac{(2n+1)\pi c}{2l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Free-free	$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \dfrac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \dfrac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \dfrac{n\pi c}{l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Fixed-fixed	$u(0, t) = 0$ $u(l, t) = 0$	$\sin \dfrac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \dfrac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \dfrac{n\pi c}{l}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$X_1^{(1)} = [\{X_1^{(1)} \cos \phi_1\}^2 + \{X_1^{(1)} \sin \phi_1\}^2]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{r_2 x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2} \right]^{1/2}$$

$$X_1^{(2)} = [\{X_1^{(2)} \cos \phi_2\}^2 + \{X_1^{(2)} \sin \phi_2\}^2]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{-r_1 x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2} \right]^{1/2}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{X_1^{(1)} \sin \phi_1}{X_1^{(1)} \cos \phi_1} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 [r_2 x_1(0) - x_2(0)]} \right\}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{X_1^{(2)} \sin \phi_2}{X_1^{(2)} \cos \phi_2} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2 [-r_1 x_1(0) + x_2(0)]} \right\}$$