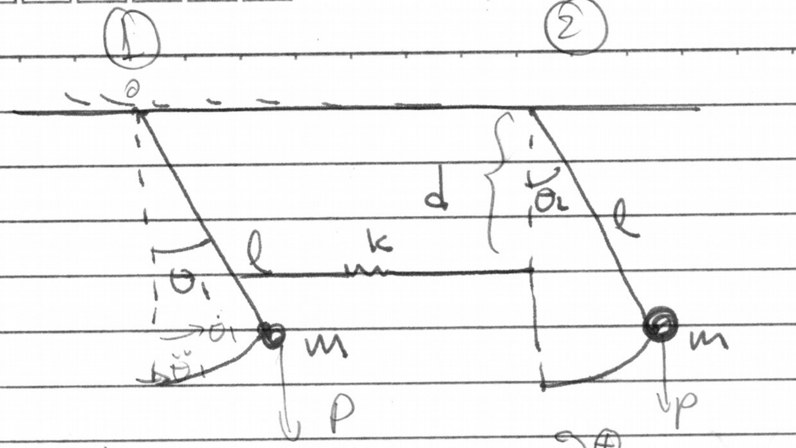
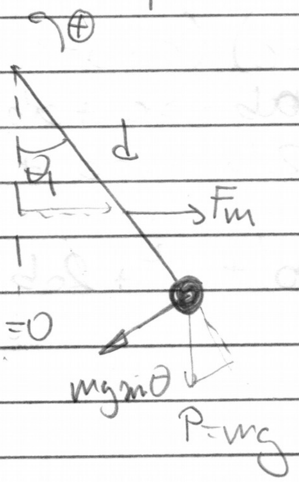
Seg | Ter | Qua | Qui | Sex | Sáb | Dom



$\Sigma M_O = 0$

Para o pêndulo 1

$(\theta_2 > \theta_1)$



$\Sigma M_O = 0$

$-mg\sin\theta_1 l + F_m d\cos\theta_1 - ml^2\ddot{\theta}_1 = 0$

$F_m = Kd(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$

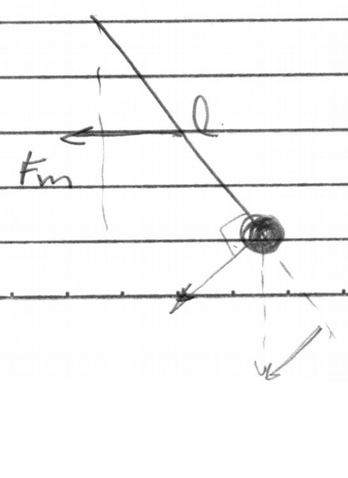
$-mg\sin\theta_1 l + Kd^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\cos\theta_1 - ml^2\ddot{\theta}_1 = 0$

p/ $\theta_1 \to 0$, $\theta_2 \to 0$

$-mgl\theta_1 + Kd^2(\theta_2 - \theta_1) - ml^2\ddot{\theta}_1 = 0$

$\ddot{\theta}_1 ml^2 + (mgl + Kd^2)\theta_1 - Kd^2\theta_2 = 0$

P/ o outro pêndulo



$-mg\sin\theta_2 l - F_m d\cos\theta_2 - ml^2\ddot{\theta}_2 = 0$

$mg\theta_2 l + Kd^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) + ml^2\ddot{\theta}_2 = 0$

$\ddot{\theta}_2 ml^2 + (Kd + mgl)\theta_2 - Kd^2\theta_1 = 0$

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + kd^2)\theta_1 - kd^2\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 - kd^2\theta_1 + (mgl + kd^2)\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl + kd^2 & -kd^2 \\ -kd^2 & mgl + kd^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Supondo que $\theta_{1,2}(t) = \Theta_{1,2}\cos(\omega t + \phi)$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 ml^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}\cancel{\cos\omega t} + \begin{bmatrix} mgl + kd^2 & -kd^2 \\ -kd^2 & mgl + kd^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}\cancel{\cos\omega t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (mgl + kd^2) - \omega^2 ml^2 & -kd^2 \\ -kd^2 & (mgl + kd^2) - \omega^2 ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Eq. característica:

$$[mgl + kd^2 - \omega^2 ml^2]^2 - k^2d^4 = 0$$

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$m^2g^2l^2 + \cancel{k^2d^4} + \omega^4 m^2 l^4 + 2mgl\,kd^2 - 2m^2gl^3\omega^2$$
$$-2k\,ml^2d^2\omega^2 - \cancel{k^2d^4} = 0$$

$$\omega^4 m^2 l^4 - 2m^2gl^3\omega^2 - 2kml^2d^2\omega^2 + m^2g^2l^2 +$$
$$+ 2mglkd^2 = 0$$

$$\omega^4(m^2l^4) - \omega^2 2(m^2gl^3 + kml^2d^2) + m^2g^2l^2 + 2mglkd^2 = 0$$

$$\omega^4 - 2\omega^2\left(\frac{g}{l} + \frac{kd^2}{ml^2}\right) + \frac{g^2}{l^2} + \frac{2d^2gk}{ml^3} = 0$$

FORONI

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

$$\Delta^2 = b^2 - 4ac$$

$$= 4\left(\frac{g^2}{\ell^2} + \frac{2gkd^2}{\ell m\ell^2} + \frac{k^2d^4}{m^2\ell^4}\right) - \frac{4g^2}{\ell} + \frac{8d^2gk}{m\ell^3}$$

$$= \frac{4k^2d^4}{m^4\ell^4} \Rightarrow \Delta = \sqrt{\frac{4k^2d^4}{m^2\ell^4}} = \frac{2kd^2}{m\ell^2}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \Delta}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2g}{\ell} + \frac{2kd^2}{m\ell^2} \pm \frac{2kl^2}{m\ell^2}\right)$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\ell} \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2kd^2}{m\ell^2}$$

Interessantemente, a primeira frequência natural é igual a de um pendulo simples

Obviamente isto não é coincidência.

(poderia ter usado as fórmula dada também !)

De (*) $\Rightarrow (mg\ell + kd^2 - m\omega^2\ell^2)\Theta_1 = kd^2\Theta_2$

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_1} = \frac{(mg\ell + kd^2 - m\omega^2\ell^2)}{kd^2}$$; os modos normais saem quando substituimos ω_1 e ω_2 nesta fórmula.

p/ $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$; $\quad n_1 = \left(\cancel{mgl} + kd^2 - \cancel{m\frac{g}{l}\cdot l^2}\right) / kd^2 = \frac{kd^2}{kd^2} = 1$

O que não é surpresa, já que a primeira frequência corresponde aos dois pêndulos vibrando em fase como um único pêndulo.

p/ $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2kd^2}{ml^2}$

$$n_2 = \frac{1}{kd^2}\left(mgl + kd^2 - m\left(\frac{g}{l} + \frac{2kd^2}{ml^2}\right)l^2\right)$$

$$= \frac{1}{kd^2}\left(\cancel{mgl} + \cancel{kd^2} - \cancel{mgl} - \cancel{2}kd^2\right) = -\frac{kd^2}{kd^2} = -1$$

O que também não é surpresa, corresponde à vibração de mesma amplitude, em oposição de fase !!

A resposta em vibração livre é:

$$\theta(t) = \begin{Bmatrix} \Theta_1^1 \\ n_1 \Theta_1^1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{Bmatrix} \Theta_1^2 \\ n_2 \Theta_1^2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Usando as fórmulas dadas e as condições iniciais:

$\theta_1(0) = \theta_0$; $\quad \theta_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$

$\phi_1 = \text{atan}\left(0 \right) = 0$; $\quad \phi_2 = \text{atan}(0) = 0$

$$\Theta_1^1 = -\frac{1}{2}\left[+\theta_0^2 + 0\right]^{1/2} = -\frac{\theta_0}{2}$$

$$\theta'_2 = -\frac{1}{2}\left[\theta_0^2 + 0\right]^{1/2} = -\frac{\theta_0}{2}$$

A resposta é:

$$\theta(t) = -\frac{\theta_0}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cos\left(\frac{g}{\ell}t\right) + \frac{\theta_0}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cos\left(\left(\frac{g}{\ell}+\frac{2kd^2}{m\ell^2}\right)t\right)$$

O batimento ocorre quando as duas frequências naturais são muito próximas, isto é, quando

$$\frac{2kd^2}{m\ell^2} \leq \frac{g}{\ell} \Rightarrow k \leq \frac{m\ell}{2kd^2}$$

Vibrações 3ºEE Questão 02

22 de Julho de 2015

Uma barra uniforme com uma massa concentrada na extremidade obece à equação a seguir, que resulta da equação de onda com a imposição de condições de contorno adequadas, tanto para vibração em torção quanto para vibração longitudinal.

```
var('alpha, beta, c, omega, l')
eqv = alpha*tan(alpha) == beta
show(eqv)
```

$$\alpha \tan\left(\alpha\right) = \beta$$

onde

```
alpha=(omega*l)/c
show(alpha)
```

$$\frac{l\omega}{c}$$

```
show(eqv)
```

$$\alpha \tan\left(\alpha\right) = \beta$$

e a velocidade do som depende do tipo de movimento. Para vibração em longitudinal e em torção temos, respectivamente,

```
E=210e9
G=80e9
rho=7800
cl=sqrt(E/rho)
ct=sqrt(G/rho)
show([cl, ct])
```

$$[5188.74521662771, 3202.56307610174]$$

As constantes β também dependem do tipo de vibração, sendo para vibração longitudinal e em torção, respectivamente

```
J0=10
M=100
d=0.05
l=1
A=N(pi)*d^2/4
V=A*l
m=rho*V
show([m, V, A, l])
Jb=m*d^2/8
show(Jb)
beta_l=m/M
beta_t=Jb/J0
show([beta_l, beta_t])
```

$$[15.3152641862502, 0.00196349540849362, 0.00196349540849362, 1]$$

$$0.00478602005820320$$

$$[0.153152641862502, 0.000478602005820320]$$

As equações a serem resolvidas são então

```
var('alpha_l, alpha_t')
eql=alpha_l*tan(alpha_l)==beta_l
eqt=alpha_t*tan(alpha_t)==beta_t
show(eql)
show(eqt)
```

$$\alpha_l \tan(\alpha_l) = 0.153152641862502$$

$$\alpha_t \tan(\alpha_t) = 0.000478602005820320$$

Para simplificar a vida, vamos usar o menor valor da tabela para a vibração em torção.Isto é meio questionável, na verdade, é muito questionável, já que o este valor tão baixo quer dizer é que a inércia da barra e tão pequena que a este sistema se comporta como se tivesse apenas um grau de liberdade. Para simplificar a vida, vamos ignorar isto. Quem fez esta consideração será premiado adequadamente.

Para a vibração longitudinal, vou interpolar linearmente para ficar igual ao que eu disse para fazer na prova, mas prestem atenção no mundo real já que a tabela é *exponencial!*

Obviamente aqui no computador eu poderia simplesmente resolver as equações não lineares diretamente.

```
d=(0.8602-0.3113)/(1-0.1)*(0.15-0.1)
alpha_l1=0.3113+d
d=(3.4267-3.1736)/(1-0.1)*(0.15-0.1)
alpha_l2=3.1736+d
show([alpha_l1, alpha_l2])
```

$$[0.341794444444444, 3.18766111111111]$$

```
alpha_t1=0.1
alpha_t2=3.1448
```

Para vibração longitudinal

```
omega_1=alpha_l1*cl/l
omega_2=alpha_l2*cl/1
show([omega_1, omega_2])
```

$$[1773.48428868104, 16539.9613425079]$$

Para vibração em torção

```
omega_1=alpha_t1*ct/l
omega_2=alpha_t2*ct/l
show([omega_1, omega_2])
```

$$[320.256307610174, 10071.4203617248]$$