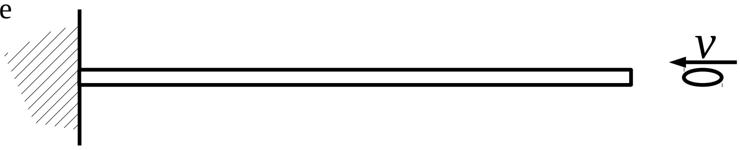
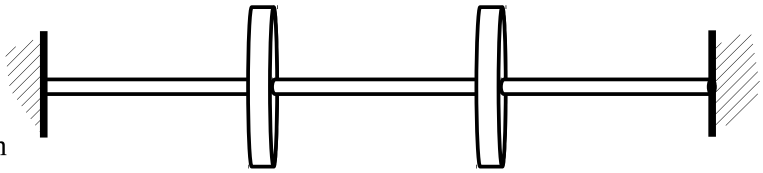
1) Considere uma barra de aço com 1 metro de comprimento e 5 mm de diâmetro, fixa na extremidade esquerda e livre na outra extremidade. Considere que a extremidade livre é atingida por um projétil de 10 gramas, que viaja a 20 m/s. A massa deste projétil pode ser considerada desprezível em relação à massa da barra, mas devido a sua alta velocidade, sua energia cinética é importante. Siga o roteiro a seguir dado a seguir, calculando o que é requisitado. a) Calcule as duas primeiras frequências naturais do sistema, em Hz. b) Considerando que a barra é uma mola linear, pela conservação de energia, calcule o máximo deslocamento da extremidade livre da barra devido ao impacto do projétil. c) Considerando que o deslocamento devido ao impacto, ao longo da barra, varie linearmente entre 0 na extremidade fixa e o valor calculado no item b, tome esta função como deslocamento inicial para o problema de vibração livre, e calcule, usando 2 termos da série, o deslocamento ao longo da barra, isto é, como uma função de *x*, para o tempo t = 0,01 s após o impacto. Considere que o aço tem módulo de elasticidade igual a 210 GPa e densidade mássica igual a 7850 kg/m³. Para uma barra em vibração longitudinal, $c=\sqrt{E/\rho}$. Obviamente desconsidere qualquer possibilidade de flambagem. Você também pode achar útil a integral abaixo *(Valor 5 pontos)*



$$\int_0^l x \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx = \frac{2l^2(\pi(2n+1)\sin(n\pi)+2\cos(\pi n))}{(2\pi n+\pi)^2}$$

2) Na figura ao lado, todas as barras tem seção circular com diâmetro igual a 5 mm e comprimento igual a 0,50 m. Os discos também são iguais, feitos de aço, com 0,30 m de diâmetro e 10 mm de altura. Suponha que um torque harmônico com amplitude igual a 0,05 Nm e frequência igual a 1 Hz seja aplicado no disco mais à esquerda e calcule a resposta no regime permanente do outro disco. Considere que o sistema é amortecido, mas que não haja amortecimento cruzado, isto é, o amortecimento em cada disco não tem efeito algum sobre o outro. Os coeficientes de amortecimento de cada disco são iguais a 0,06 kg m²/s². O módulo de cisalhamento do aço é igual a 80 GPa, o momento de área de uma seção circular é dado por $J=\pi d^4/64$ e o momento de inércia de área de um cilindro de raio R e massa total M é dado por $J_0=MR^2/2$. *(Valor 5 pontos)*



End Conditions of Bar	Boundary Conditions	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Natural Frequencies
Fixed-free	$u(0,t)=0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$	$\cos\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=C_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n=\frac{(2n+1)\pi c}{2l}$; $n=0,1,2,\ldots$
Free-free	$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$; $n=0,1,2,\ldots$
Fixed-fixed	$u(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$; $n=1,2,3,\ldots$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}}, \quad \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n, \quad \zeta = \frac{c}{c_c}, \quad c_c = 2m\omega_n$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2, \quad T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left[C_n \cos\frac{(2n+1)\pi c t}{2l} + D_n \sin\frac{(2n+1)\pi c t}{2l}\right]$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx$$

$$D_n = \frac{4}{(2n+1)\pi c}\int_0^l \dot{u}_0(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx$$

$$k_t = \frac{GJ}{l}$$

$$Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}$$

$$\boldsymbol{Z}(i\omega)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F_0}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}(i\omega)^{-1}\boldsymbol{F_0}$$

$$\boldsymbol{Z}(i\omega) = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$