Vibrações Mecânicas -- 4º EE

In[1]:=
```
Remove["Global`*"];
```

Remove::rmnsm : There are no symbols matching "Global`*". ≫

Questão 1

Temos as proprieadades do aço:

In[2]:=
```
Ey = 210 × 10^9;
ρ = 7850;
```

E a geometria da barra

In[4]:=
```
l = 1;
d = 0.005;
```

A velocidade do som no aço (para ondas compressionais) é

In[6]:=
```
c = N[Sqrt[Ey / ρ]]
```

Out[6]= 5172.19

As duas primeiras frequências naturais são dadas por (do quadro fornecido)

In[7]:=
$$\omega n = \frac{(2\,n+1)\,\pi c}{2\,l}$$
```
ω1 = ωn /. n → 0
ω2 = ωn /. n → 1
```

Out[7]= 8124.46 (1 + 2 n)

Out[8]= 8124.46

Out[9]= 24 373.4

Transformando para Hertz

In[10]:=
```
f1 = ω1 / (2 π)
f2 = ω2 / (2 π)
```

Out[10]= 1293.05

Out[11]= 3879.15

A massa, velocidade e energia cinética do projétil são

In[12]:=
```
m = 0.010;
v = 20;
```
$$Te = \frac{1}{2} m\, v^2$$

Out[14]= 2.

(em Joules!)

Considerando que a barra se comporte como uma mola linear elástica, In[15]:= $A = \frac{\pi d^2}{4}$

$k = \frac{Ey A}{l}$

Out[15]= 0.000019635

Out[16]= 4.12334×10^6

In[17]:= $Ue = \frac{1}{2} k x^2$

Out[17]= $2.06167\times10^6 x^2$

Igualando as energias cinética e potencial na barra, para encontrar “x” (Isto é uma simplificação grosseira,
para resolver este problema corretamente seria necessário resolver o problema dinâmico transiente, o que
seria muito mais complicado.)

In[18]:=
```
Solve[Te == Ue, x]
x0 = x /. Last[%]
```

Out[18]= {{x → -0.00098493}, {x → 0.00098493}}

Out[19]= 0.00098493

Este será o deslocamento na extremidade direita da barra, e o deslocamento total será considerado linear ao longo da barra
de forma que a função que descreve o deslocamento inicial é

In[20]:= $u0 = \frac{x0\, x}{l}$

Out[20]= 0.00098493 x

Como, pelo enunciado, Dn são nulos pois a velocidade inicial é nula, só temos que calcular Cn; que é dado pela
fórmula

In[21]:=

$$Cn = \frac{2}{l}\int_0^l u0\, \mathrm{Sin}\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right] dx$$

Out[21]= $$\frac{0.00196986\,(4\,\mathrm{Cos}[n\pi] + 2(1+2n)\pi\,\mathrm{Sin}[n\pi])}{(\pi+2n\pi)^2}$$

Fiz a integral diretamente no *Mathematica* aqui, mas a fórmula era dada (sem a constante x0/l) na prova.
Como são pedidos dois termos, para n = 0 e n = 1

In[22]:=
```
C0 = Cn /. n → 0
C1 = Cn /. n → 1
```

Out[22]= 0.000798354

Out[23]= -0.000088706

Para calcular a forma da deformação no tempo requisitado, os cossenos que aparecem na série são

In[24]:=
```
t = 0.01;
cs = Cos[(2 n + 1) π c t / (2 l)]
cs0 = cs /. n → 0
cs1 = cs /. n → 1
```

Out[25]= $\mathrm{Cos}[81.2446\,(1+2\,n)]$

Out[26]= 0.906121

Out[27]= 0.257541

Os termos em seno para o deslocamento são

In[28]:=
```
s = Sin[(2 n + 1) π x / (2 l)]
s0 = s /. n → 0
s1 = s /. n → 1
```

Out[28]= $\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2}(1+2\,n)\,\pi x\right]$

Out[29]= $\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right]$

Out[30]= $\mathrm{Sin}\left[\frac{3\,\pi x}{2}\right]$

O deslocamento de toda a barra para o tempo dado é então

In[31]:=
```
ux = s0 C0 cs0 + s1 C1 cs1
```

Out[31]= $0.000723406\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right] - 0.0000228455\,\mathrm{Sin}\left[\frac{3\,\pi x}{2}\right]$

Poderíamos ter feito de maneira muito mais sofisticada com o *Mathematica*, mas preferi fazer “na mão”, mais ou
menos como eu esperaria que tivesse sido feito na prova.
O resultado está em metros, em milímetros ficaria

In[32]:=
```
Simplify[1000 ux]
```

Out[32]= $0.723406\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right] - 0.0228455\,\mathrm{Sin}\left[\frac{3\,\pi x}{2}\right]$

Questão 2

In[33]:=
```
Remove ["Global`*"];
```

As grandezas dadas são

In[34]:=
```
l = 0.50;
de = 0.005;
dd = 0.30;
h = 0.010;
A = 0.05;
f = 1;
ρ = 7850;
Ey = 210 × 10^9;
Gy = 80 × 10^9;
```

Para uma barra de seção circular

In[43]:= $J = \frac{\pi d\wedge 4}{64}$

$J0 = \frac{m\ r^2}{2}$

Out[43]= $\frac{d^4 \pi}{64}$

Out[44]= $\frac{m\ r^2}{2}$

A rigidez à torção de cada barra é dada por

In[45]:= $kt = \frac{Gy J}{l}$ /. d → de

Out[45]= 4.90874

A massa de cada disco é

In[46]:= $m\ = \rho \frac{\pi dd^2}{4} h$

Out[46]= 5.54884

Para o disco

In[47]:= $r = dd/2$

J0

Out[47]= 0.15

Out[48]= 0.0624244

A matriz de rigidez deste sistema com 2 GL é, obviamente

In[49]:= $\begin{pmatrix} 2 kt & -kt \\ -kt & 2 kt \end{pmatrix}$

Out[49]= {{9.81748, −4.90874}, {−4.90874, 9.81748}}

A matriz de amortecimento é dada como

In[50]:= c11 = 0.06

$\begin{pmatrix} c11 & 0 \\ 0 & c11 \end{pmatrix}$

Out[50]= 0.06

Out[51]= {{0.06, 0}, {0, 0.06}}

E a matriz de massa

In[52]:= $\begin{pmatrix} J0 & 0 \\ 0 & J0 \end{pmatrix}$

Out[52]= {{0.0624244, 0}, {0, 0.0624244}}

Pela definição do problema podemos ver que só há acoplamento elástico.

A frequência de excitação é

In[53]:= $\omega = 2 \pi f$

Out[53]= 2π

Com isto podemos calcular a matriz de impedância, que possui termos complexos pois há amortecimento.

```
In[54]:= z11 = -ω^2 J0 + ⅈ ω c11 + 2 kt
z22 = z11
z12 = -kt
ziw= (z11  z12
      z12  z22)
Out[54]= 7.35306+0.376991ⅈ
Out[55]= 7.35306+0.376991ⅈ
Out[56]= -4.90874
Out[57]= {{7.35306+0.376991ⅈ, -4.90874}, {-4.90874, 7.35306+0.376991ⅈ}}
```

A inversa da matriz de impedância é

```
In[58]:= zinv = Inverse[ziw]
Out[58]= {{0.240542-0.0320684ⅈ, 0.159064-0.0295634ⅈ},
  {0.159064-0.0295634ⅈ, 0.240542-0.0320684ⅈ}}
```

O vetor de de Forças Externas é

```
In[59]:= F0 = (0.05
               0.0)
Out[59]= {{0.05}, {0.}}
```

O vetor de deslocamentos harmônicos é então (vamos separar o deslocamento do outro disco)

```
In[60]:= xA = zinv.F0
x2 = Last[%]
Out[60]= {{0.0120271-0.00160342ⅈ}, {0.00795322-0.00147817ⅈ}}
Out[61]= {0.00795322-0.00147817ⅈ}
```

A amplitude e a fase são então

```
In[62]:= Abs[x2]
Arg[x2]
Out[62]= {0.00808942}
Out[63]= {-0.183761}
```

As duas coisas em radianos.