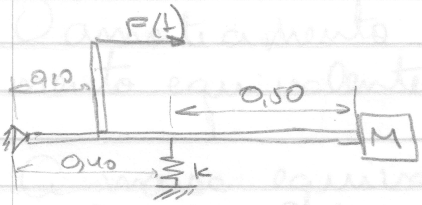
3º EE VIBRAÇÕES 02/01/2015 GABARITO:

Questão 1)



massa das barras é desprezível

$M = 0,50\ kg$

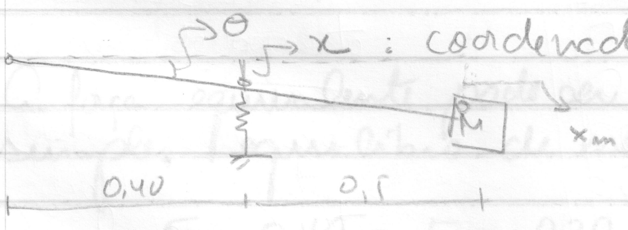
$\zeta = 0,01$ $k = 2\ kN/m$

Inicialmente em repouso.

$F(t) = -12t(t-2)\ N;\ 0 \le t \le 2s$

Em primeiro lugar, claramente é necessário transformar o sistema em um sistema equivalente, no qual todas as grandezas dinâmicas estejam referidas às mesmas coordenadas generalizadas.

Me parece óbvio que o mais conveniente aqui é usar o deslocamento vertical no ponto de contato com a mola, mas muitas outras alternativas são possíveis.



Vamos supor, é claro, pequenos deslocamentos e rotações apenas.

A rigidez já é a rigidez equivalente, é dado

O amortecimento também já é o amortecimento equivalente

A massa equivalente pode ser calculada pela igualdade de energia cinética:

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}_m^2$$

Para pequenos deslocamentos, da semelhança de triângulos:

$$\frac{x}{0{,}4} = \frac{x_m}{0{,}9} \Rightarrow x_m = \frac{0{,}9}{0{,}4} x$$

e como tudo é linear, derivando em relação ao tempo:

$$\dot{x}_m = 2{,}25 \dot{x}$$

Assim $\cancel{\frac{1}{2}} m_{eq} \cancel{\dot{x}^2} = \cancel{\frac{1}{2}} M \, 2{,}25^2 \cancel{\dot{x}^2}$

$$m_{eq} = 5{,}06 M = 5{,}06 \times 0{,}5 = \underline{\underline{2{,}53 kg}}$$

A força equivalente pode ser calculada por um simples equilíbrio de momentos:

$$F_{eq} \cdot 0{,}40 = F \cdot 0{,}30$$

$$F_{eq} = \frac{0{,}30}{0{,}40} F = 0{,}75 F = -\frac{3}{4} 12 t (t-2)$$

$$F_{eq} = \underline{\underline{-9 t (t-2)}}$$

Com a massa e a rigidez equivalentes podemos calcular a frequência natural do sistema

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{2000}{2{,}53}} = 28{,}1 \text{ rad/s}$$

O amortecimento equivalente sai de

$$c_c = 2 m_{eq} \omega_n = 2 \cdot 2{,}53 \cdot 28{,}1 = 142{,}2 \text{ kg/s}$$

$$c = \zeta c_c = 0{,}01 \times 142{,}2 = 1{,}42 \text{ kg/s}$$

O deslocamento calculado pela Integral de Duhamel é dado por (sabendo que as condições iniciais são nulas):

$$x_p(t) = \frac{1}{m_{eq}\,\omega_d} \int_0^t F_{eq}(t)\, e^{-\zeta \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau)\, d\tau$$

Faltou ainda calcular $\omega_d = (1-\zeta^2)\,\omega_n = (1-0{,}01^2)\,\omega_n$,

$$\omega_d = 0{,}9999\,\omega_n$$

A diferença é tão pequena que vou usar o valor original.

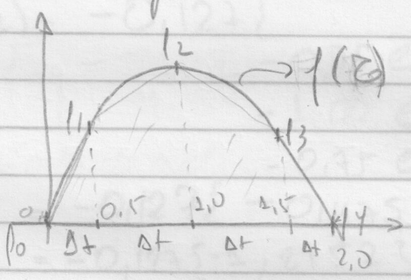
No caso, então:

$$x_p(t) = \frac{-1}{2{,}53 \times 28{,}1} \int_0^2 9\tau(\tau-2)\, e^{-0{,}01 \times 28{,}1 \times (2-\tau)} \sin 28{,}1 (2-\tau)\, d\tau$$

Simplificando:

$$x_p(t) = -0,127 \int_0^2 \tau(\tau-2)\, e^{-0,281(2-\tau)} \sin 28,1(2-\tau)\, d\tau$$

Integra pela regra do trapézio é equivalente a calcular a área, considerando trapézios, por exemplo



$$I \approx \frac{\cancelto{0}{f(0)} + f(1)}{2} \Delta\tau + \frac{f(1) + f(2)}{2} \Delta\tau + \frac{f(2) + f(3)}{2} \Delta\tau + \frac{f(3) + \cancelto{0}{f(4)}}{2} \Delta\tau$$

$$I = \left(\frac{2f(1) + 2f(2) + 2f(3)}{2} \right) \Delta\tau$$

$$I = (f(1) + f(2) + f(3))\, \Delta\tau$$

Obviamente eu usei o fato de que a nossa função a ser integrada é 0 no início e no fim do intervalo!

No caso, $\Delta\tau = \frac{2}{4} = 0,5\ s$

$$f(\tau) = \tau(\tau-2)\, e^{-0,281(2-\tau)} \sin 28,1(2-\tau)$$

(Deixei a constante de fora, basta multiplicar depois)

A integral fica então:

$$x_p(2) = -0{,}127 \{ \; 0{,}5(0.5-2)\,e^{-0{,}281(2-0{,}5)} \sin 28{,}1(2-0{,}5) + 1.0(1.0-2)\,e^{-0{,}281(2-1)} \sin 28{,}1(2-1) + 1{,}5(1{,}5-2)\,e^{-0{,}281(2-1{,}5)} \sin 28{,}1(2-1{,}5) \}$$

ou

$$x_p(2) = -0{,}127 \{ -0{,}75\,e^{-0{,}4215} \sin(42{,}15) + -1{,}00\,e^{-0{,}281} \sin(28{,}1) + -0{,}75\,e^{-0{,}141} \sin(14{,}05) \}$$

$$= -0{,}127 \{ -0{,}4753 - 0{,}1309 - 0{,}6089 \}$$

$$= -0{,}127 \{ -1{,}2152 \}$$

$$= 0{,}154 \text{ m}$$

(A hipótese de pequenos deslocamentos é meio forçada)

Questão 2: As grandezas equivalentes já foram calculadas na questão anterior, a única diferença é a força, que é dada por
$f(t) = |A \sin \omega t|$, com $A = 18N$.

A força equivalente é $\frac{3}{4}$ da força na entre unidade da base, 4 então, no caso:

$$F_{eq} = \frac{3}{4_2} 18_9 |\sin \omega t| = 13,5 |\sin \omega t|$$

O período de aplicação é 3 segundos, a frequência é $= f = \frac{1}{3}$ Hz, e a frequência circular é

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{3} = 2,09 \text{ rad/s}$$

Os três primeiros termos da Série de Fourier desta função são:

$$f(t) = \frac{2 \times 13,5}{\pi} - \frac{4 \times 13,5}{\pi} \left\{ \frac{\cos(2,09t)}{3} + \frac{\cos(2 \times 2,09t)}{15} + \frac{\cos(3 \times 2,09t)}{35} \right\}$$

ou

$$f(t) = \underset{a_0}{\frac{27}{\pi}} - \underset{a_1}{\frac{54}{3\pi}} \cos(2,09t) - \underset{a_2}{\frac{54}{15\pi}} \cos(2 \times 2,09t) - \underset{a_3}{\frac{54}{35\pi}} \cos(3 \times 2,09t)$$

$$f(t) = 8,59 - 5,73 \cos(2,09t) - 1,15 \cos(2 \times 2,09t) - 0,491 \cos(3 \times 2,09t)$$

Esta é obviamente uma série em cosenos apenas. A resposta no regime permanente é então:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k_{eq}} + \frac{a_1/k_{eq}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\cos(\omega t-\phi) + \frac{a_2/k_{eq}}{\sqrt{(1-4r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\cos(2\omega t-\phi_2)$$

$$+ \frac{a_3/k_{eq}}{\sqrt{(1-9r^2)^2+(6\zeta r)^2}}\cos(3\omega t-\phi_3)$$

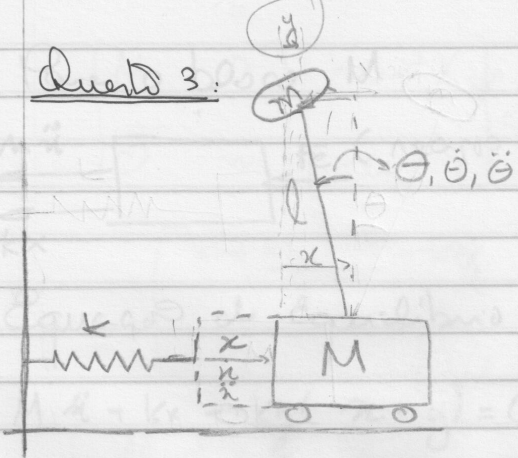
no caso: $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2{,}09}{28{,}1} = 0{,}0744$

$$x_p(t) = \frac{8{,}59}{2\times 2000} + \frac{5{,}73\cos(\omega t-\phi_1)}{2000\sqrt{(1-0{,}0744^2)^2+(2\times0{,}01\times0{,}744)^2}} +$$
$$+ \frac{1{,}15\cos(2\omega t-\phi_2)}{2000\sqrt{(1-4\times0{,}0744^2)^2+(2\times0{,}01\times0{,}0744)^2}} +$$
$$+ \frac{0{,}49\cos(3\omega t-\phi_3)}{2000\sqrt{(1-9\times0{,}0744^2)^2+(6\times0{,}01\times0{,}0744)^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_p(t) = {} & 2{,}148\times10^{-3} + 2{,}845\times10^{-3}\cos(2{,}09t-\phi_1) + \\ & +0{,}563\times10^{-3}\cos(4{,}18t-\phi_2) + \\ & +0{,}258\times10^{-3}\cos(6{,}27t-\phi_3) \end{aligned}}$$

Falta calcular os ângulos de fase, não me lembro se dei a fórmula durante a prova. De qualquer forma, como o atrito é muito baixo, os ângulos de fase são praticamente nulos.

Questão 3:

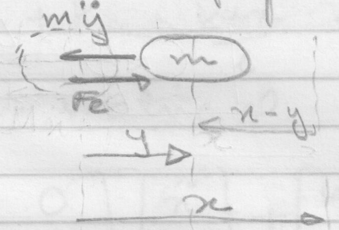


O sistema tem claramente 2 graus de liberdade.

Vamos escolher as coordenadas generalizadas x e y mostradas ao lado.

Vamos admitir que os deslocamentos e as rotações são pequenas!

Para a massa pequena



$$l\theta = x - y$$

$$\theta = \frac{x-y}{l}$$

A força elástica é a força que equilibra o momento elástico de torção:

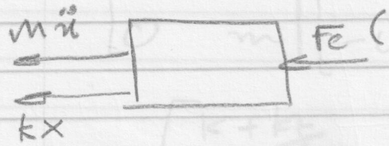
$$Fe \cdot l = k_t \theta$$

$$Fe = \frac{k_t \theta}{l} = \frac{k_t (x-y)}{l}$$

A equação de movimento fica então:

$$m\ddot{y} - \frac{k_t}{l}(x-y) = 0$$

Para o bloco M:



(reação da força no bloco "m")

Equação de Equilíbrio:

$$M\ddot{x} + kx + \frac{kt}{l}(x - y) = 0$$

O sistema de equações é:

$$\begin{cases} m\ddot{y} - \dfrac{k_t x}{l} + \dfrac{k_t y}{l} = 0 \\ M\ddot{x} + kx + \dfrac{k_t x}{l} - \dfrac{k_t}{l} y = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + \frac{k_t}{l} & -k_t/l \\ -\frac{k_t}{l} & +k_t/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Supondo que a resposta seja da forma: $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} e^{i\omega t}$

(Não é necessário considerar o ângulo de fase pois não há amortecimento)

As equações de movimento ficam:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 X \\ -\omega^2 Y \end{bmatrix} \cancel{e^{i\omega t}} + \begin{bmatrix} k+\frac{k_t}{l} & -\frac{k_t}{l} \\ -\frac{k_t}{l} & \frac{k_t}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k+\frac{k_t}{l} & -k_t/l \\ -k_t/l & k_t/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \cancel{e^{i\omega t}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -M\omega^2 + k + \frac{k_t}{l} & -k_t/l \\ -\frac{k_t}{l} & -m\omega^2 + k_t/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A eq. característica é:

$$\left(-M\omega^2 + k + \frac{k_t}{l}\right)\left(-m\omega^2 + \frac{k_t}{l}\right) - \frac{k_t^2}{l^2} = 0$$

$$+Mm\,\omega^4 - \underbrace{\left(M\frac{k_t}{l} + mk + m\frac{k_t}{l}\right)}_{B}\omega^2 + \frac{k k_t}{l} + \cancel{\frac{k_t^2}{l^2}} - \cancel{\frac{k_t^2}{l^2}} = 0$$

As frequências naturais são:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4Mm\frac{k k_t}{l}}}{2Mm}$$