```
Segunda
```

Vibrações Mecânicas

Primeiro EE, 29/10/2014

```
Remove ["Global`*"];
```

Questão 1

$do = 0.020$
$t = 0.001$
$di = do - 2t$
$l = 1$
$Ey = 210 \times 10^9$
$Gy = 80 \times 10^9$
$ixx = \frac{\pi(do^4 - di^4)}{64}$
$Jo = \frac{\pi(do^4 - di^4)}{32}$
$A = \frac{\pi(do^2 - di^2)}{4}$
$r = 0.15$

0.02

0.001

0.018

1

210 000 000 000

80 000 000 000

2.70098×10^{-9}

5.40197×10^{-9}

0.0000596903

0.15

Rigidez axial

$k1 = \frac{Ey\,A}{l}$
$k8 = 8\,k1$

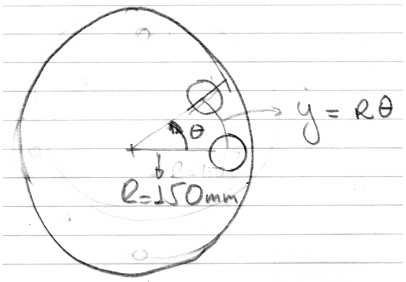
1.2535×10^{7}

1.0028×10^{8}

Não se espantem com o valor pois isto é N/m!!!

Rigidez à torção

Imaginando que uma extremidade do trocador seja fixa, e aplicando uma rotação de θ radianos na outra, temos a seguinte situação, examinada olhando-se axialmente para a extremidade que foi girada.



Para θ pequeno, podemos considerar que o arco é igual ao deslocamento vertical da ponta de uma viga bi-engastada.
Cada tubo também gira do mesma ângulo θ, portanto a energia total de deformação é igual à energia de deflexão mais a energia de torção!

A energia de deformação correspondende à flexão é

$$\texttt{uf} = \frac{1}{2}\texttt{kf}\,\texttt{y}^2$$

$$\frac{\texttt{kf}\,\texttt{y}^2}{2}$$

A energia de deformação correspondente à torção é

$$\texttt{ut} = \frac{1}{2}\texttt{kt}\,\theta^2$$

$$\frac{\texttt{kt}\,\theta^2}{2}$$

A energia equivalente, considerando a torção, é

$$\texttt{ue} = \frac{1}{2}\texttt{ke}\,\theta^2$$

$$\frac{\texttt{ke}\,\theta^2}{2}$$

Igualando as energias

```
eq = ue == uf + ut
```

$$\frac{\texttt{ke}\,\theta^2}{2} == \frac{\texttt{kf}\,\texttt{y}^2}{2} + \frac{\texttt{kt}\,\theta^2}{2}$$

Usando o valor de y

```
eq = eq /. y → r θ
```

$$\frac{\texttt{ke}\,\theta^2}{2} == 0.01125\,\texttt{kf}\,\theta^2 + \frac{\texttt{kt}\,\theta^2}{2}$$

A rigidez equivalente é então

```
Solve[eq, ke]
ke = ke /. First[%]
```

$$\left\{\left\{ke \to \frac{2.\,(0.01125\,kf\,\theta^2 + 0.5\,kt\,\theta^2)}{\theta^2}\right\}\right\}$$

$$\frac{2.\,(0.01125\,kf\,\theta^2 + 0.5\,kt\,\theta^2)}{\theta^2}$$

No caso

$$kf = \frac{12\,Ey\,ixx}{l^3}$$

$$kt = \frac{Gy\,Jo}{l}$$

```
ke
```

6806.48

432.157

585.303

Em Nm/rad.

Questão 2

```
Remove ["Global`*"];
```

Para 1 metro o disco dá 4 voltas, isto é, para cada metro o disco gira 8π radianos. Fazendo uma regra de três (pois obviamente a rotação é linear no deslocamento) com y e θ chegamos na fórmula dada $y = \frac{\theta}{8\pi}$,

O sistema tem um único grau de liberdade, pois dada a posição vertical, a rotação do disco está determinada pela fórmula acima.

$$m = 1.5$$
$$r = 0.075$$
$$Jo = \frac{m\,r^2}{2}$$

1.5

0.075

0.00421875

Como não há amortecimento mencionado, trataremos o problema como um problema de vibração livre não amortecida.

Precisamos calcular a rigidez à torção equivalente.

A energia armazenada em uma mola de torção em um ângulo θ é

$$ue = \frac{1}{2}\,ke\,\theta^2$$

$$\frac{ke\,\theta^2}{2}$$

A energia armazenada na mola linear é

$$uy = \frac{1}{2} ky\, y^2$$

$$\frac{ky\, y^2}{2}$$

Como

$$y = \frac{\theta}{8\pi}$$

$$\frac{\theta}{8\pi}$$

```
ue == uy
Solve[%, ke]
ke = ke /. First[%]
```

$$\frac{ke\, \theta^2}{2} == \frac{ky\, \theta^2}{128\, \pi^2}$$

$$\left\{\left\{ke \to \frac{ky}{64\, \pi^2}\right\}\right\}$$

$$\frac{ky}{64\, \pi^2}$$

No caso,

```
ky = 10000
```

10000

```
ke
```

$$\frac{625}{4\, \pi^2}$$

Em Nm/rad.

Da mesma forma precisamos calcular a massa equivalente, pela igualdade de energias cinéticas. Isto leva a:

$$te = \frac{1}{2} Jeq\, \omega^2$$

$$tr = \frac{1}{2} Jo\, \omega^2$$

$$tt = \frac{1}{2} md\ v^2$$

$$\frac{Jeq\, \omega^2}{2}$$

$$0.00210938\, \omega^2$$

$$\frac{md\ v^2}{2}$$

com ω igual a velocidade angular e v a velocidade de translação. Obviamente estas duas estão relacionadas pela derivada em relação ao tempo da equação de restrição

```
v = ω/(8 π)
```

$\frac{\omega}{8\pi}$

Igualando as energias

```
te == tr+tt
Solve[%, Jeq]
FullSimplify[%]
Jeq = Jeq /. First[%]
```

$\frac{\text{Jeq}\,\omega^2}{2} == 0.00210938\,\omega^2 + \frac{\text{md}\ \omega^2}{128\,\pi^2}$

$\left\{\left\{\text{Jeq} \to \frac{1}{\omega^2} 2.\left(0.00210938\,\omega^2 + 0.000791572\,\text{md}\ \omega^2\right)\right\}\right\}$

$\{\{\text{Jeq} \to 0.00421875 + 0.00158314\,\text{md}\}\}$

$0.00421875 + 0.00158314\,\text{md}$

No caso,

```
md = m
Jeq
```

1.5

0.00659347

O tempo entre duas posições mais extremas é exatamente meio período natural (se alguém considerou um período completo também está certo pois a pergunta poderia ter sido entendida desta forma.)

$\omega n = \sqrt{\frac{\text{ke}}{\text{Jeq}}}$

49.0008

A frequência natural é

$\text{fn} = \frac{2\pi}{\omega n}$

0.128226

(em Hz). O período natural é

$\tau n = \frac{1}{\text{fn}}$

7.79872

(em segundos.) O tempo entre dois extremos é então

$\frac{\tau n}{2}$

3.89936

Em segundos.

Como não há velocidade inicial, o ângulo de fase é 0, e a resposta é dada por

```
θt = θo Cos[ωn t]
```

```
θo Cos[49.0008 t]
```

e a velocidade é

```
vt = -ωn θo Sin[ωn t]
```

```
-49.0008 θo Sin[49.0008 t]
```

Para o deslocamento vertical inicial dado

```
yo = 0.01
θo = 8 π yo
```

```
0.01

0.251327
```

(em radianos.) A equação de movimento é então

```
θt
```

```
0.251327 Cos[49.0008 t]
```

A velocidade é

```
vt
```

```
-12.3152 Sin[49.0008 t]
```

A máxima velocidade é claro que é então o coeficiente da expressão anterior, em rad/s. Pessoas mais inteligentes fizeram esta parte por conservação de energia, está correto também (se você considerou todos os termos), parabéns.

Questão 3

```
Remove ["Global`*"];
```

Dados Iniciais

$x_1 = 1$
$x_6 = 0.5\, x_1$
$m = 5$

```
1

0.5

5
```

Decremento logarítmico

$$eq1 = \delta == \frac{1}{m} \mathrm{Log}\left[\frac{x_a}{x_b}\right]$$

$$\delta == \frac{1}{5} \mathrm{Log}\left[\frac{x_a}{x_b}\right]$$

```
Solve[eq1 /. {xa → x1 , xb → x6}, δ]
δx = First[δ /. %]
```

{{δ → 0.138629}}

0.138629

Razão de amortecimento

$$eq2 = \delta == \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

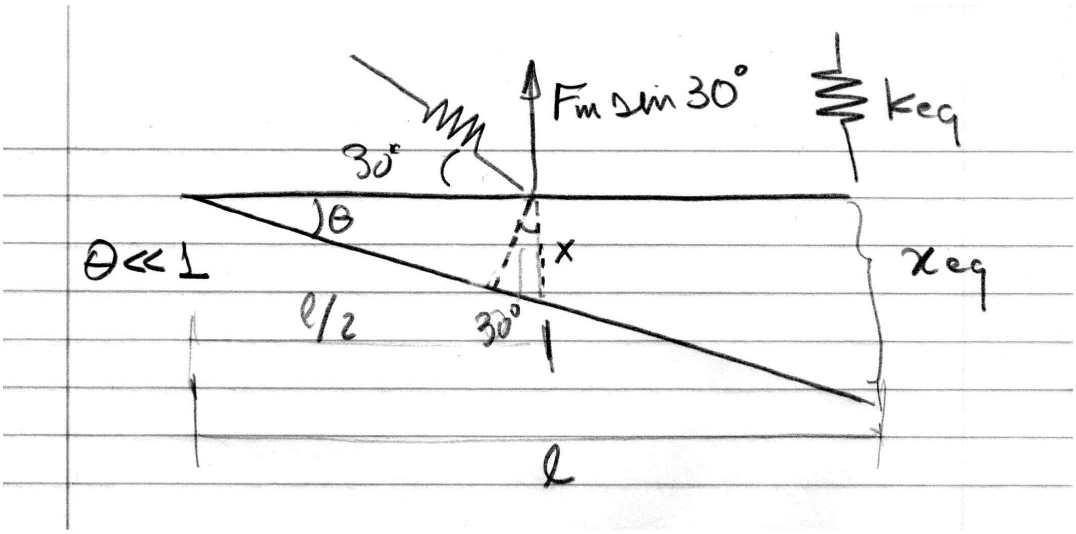
$$\delta == \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

```
Solve[eq2 /. δ → δx, ζ]
ζx = First[ζ /. %]
```

{{ζ → 0.0220582}}

0.0220582

Cálculo da rigidez equivalente (para pequenos deslocamentos)
Fazendo o somatório de momentos em relação ao pivot da barra



O seno aparece duas vezes porque uma é para projetar a força da mola na direção vertical e a outra para projetar o deslocamento x na direção da mola!

```
k_eq x_eq l == k_s x Sin[30 Degree] Sin[30 Degree] l/2
eq3 = % /. x_eq → 2 x
Solve[eq3, k_eq]
First[k_eq /. %]
k_eq = %/. k_s → 21000
N[%]
```

$$l\,k_{eq}\,x_{eq} == \frac{1}{8}\,l\,x\,k_s$$

$$2\,l\,x\,k_{eq} == \frac{1}{8}\,l\,x\,k_s$$

$$\left\{\left\{k_{eq} \to \frac{k_s}{16}\right\}\right\}$$

$$\frac{k_s}{16}$$

$$\frac{2625}{2}$$

1312.5

Cálculo da massa equivalente para a barra, através da igualdade das energias cinéticas. Supondo um deslocamento harmônico x_{eq} na extremidade da barra, o delocamento claramente é linear ao longo da barra, já que ela é rígida. O deslocamento vertical (x) pode ser escrito em função do comprimento da barra (y) como $x(y) = \frac{x_{eq}\,y}{l}$. A velocidade é claramente $x(y) = \frac{\dot{x}_{eq}\,y}{l}$. (obs: sei que é confuso usar x para o deslocamento vertical e y para o horizontal, mas fiquei com preguiça de refazer e reescanear o desenho acima).

A massa de um elemento infinitesimal de barra é ρAdy, portanto a energia cinética total da barra é:

$$\text{Tb} = \int_0^l \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{v_{eq}\,y}{l}\right)^2 dy$$

$$\frac{1}{6} A\, l\, \rho\, v_{eq}^2$$

Obviamente, A l ρ é a massa total da barra.

$$\text{Tb} = \text{Tb} \;/.\; A\, l\, \rho \to \text{Mb}$$

$$\frac{\text{Mb}\, v_{eq}^2}{6}$$

A energia cinética de uma massa equivalente na extremidade da barra é:

$$\text{Teq} = \frac{1}{2}\text{Meq}\, v_{eq}^2$$

$$\frac{\text{Meq}\, v_{eq}^2}{2}$$

Resolvendo para Meq

```
eq4 = Tb == Teq
Solve[eq4, Meq]
First[Meq /. %]
Meq = N[% /. Mb → 10]
```

$$\frac{Mb\, v_{eq}^2}{6} == \frac{Meq\, v_{eq}^2}{2}$$

$$\left\{\left\{Meq \to \frac{Mb}{3}\right\}\right\}$$

$$\frac{Mb}{3}$$

```
3.33333
```

A massa total na extremidade da barra é então

```
Mt = Meq + 8
```

```
11.3333
```

A frequencia natural é, no caso

$$\omega n = \sqrt{\frac{k}{M}} \;/.\; \{k \to k_{eq},\ M \to Mt\}$$

$$fn = \frac{\omega n}{2\,\pi}$$

```
10.7615
```

```
1.71274
```

A frequencia amortecida é

$$\omega d = \omega n \sqrt{1-\zeta^2} \;/.\; \zeta \to \zeta x$$

```
10.7588
```

Para calcular a amplitude, temos:
A velocidade de impacto é:

$$vi = \sqrt{8 \times 9.8 \times 0.01}$$

```
ml  = vi8
```

```
0.885438
```

```
7.0835
```

A velocidade inicial do sistema completo é então, por conservação de momento linear

```
v0 = ml /Meq
```

```
2.12505
```

```
x0 = 0
ζ = ζx
```

$$X0 = \frac{\sqrt{x0^2\,\omega n^2 + v0^2 + 2\,x0\,v0\,\zeta\,\omega n}}{\omega d}$$

```
ϕ = ArcTan[x0 ωd, v0 + ζ ωn x0]
```

0

0.0220582

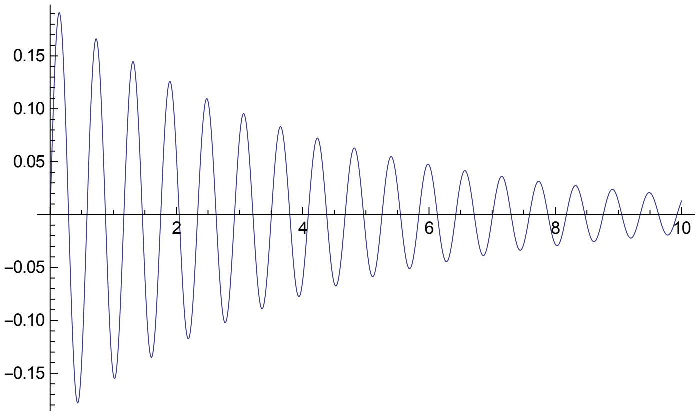
0.197517

1.5708

$x[t\_] := X0\, e^{-\zeta\,\omega n\,t}\, \mathrm{Cos}[\omega d\, t - \phi]$

Só por curiosidade

```
Plot[x[t], {t, 0, 10}]
```



A resposta é 10 segundos é

$x_{10} = x[10]$

0.0128599

(em metros, em mm é isto vezes 1000.)