Vibrações Mecânicas

Sistemas Contínuos

DEMEC – UFPE
Ramiro Willmersdorf
ramiro@willmersdor.net

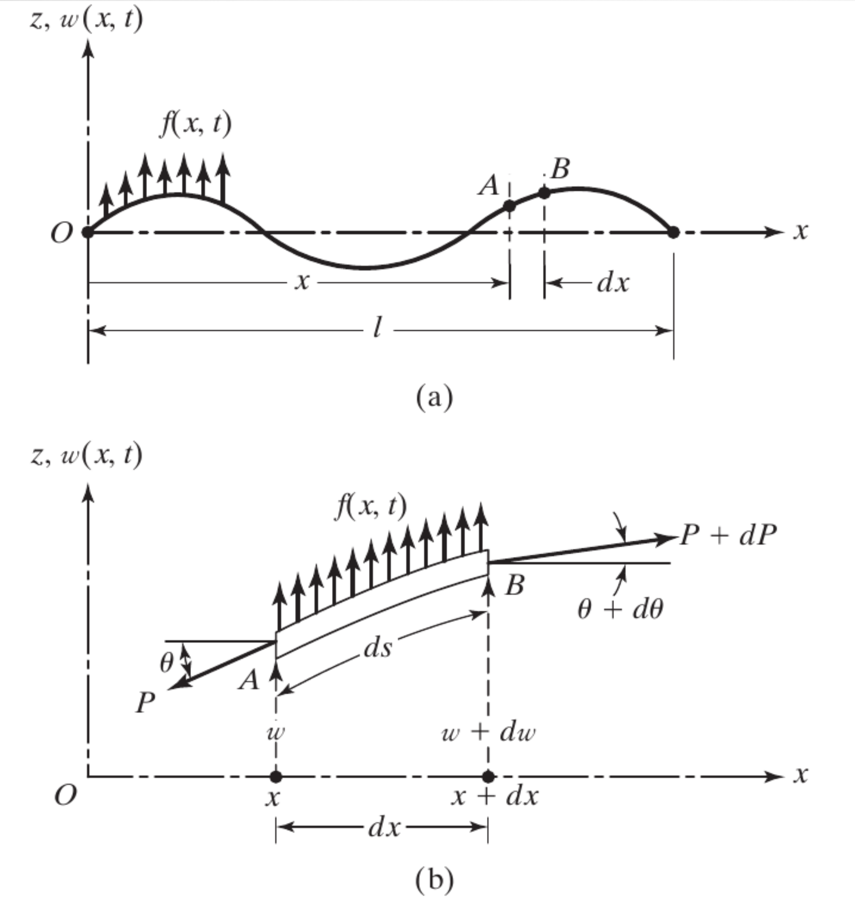
Sistemas Contínuos

- Sistemas contínuos ou distribuídos
- Equações diferenciais *parciais*;
- Cabos, cordas, vigas, etc.;
- Membranas, placas, etc;
- Processo de análise:
  - DCL de elemento infinitesimal;
  - Equações de equilíbrio dinâmico;
  - Soluções Harmônicas;
  - Condições de contorno;

Sistemas Contínuos

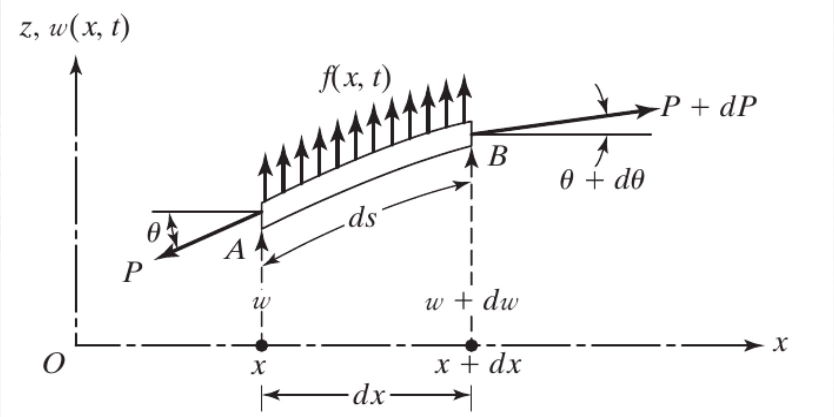
- Características:
  - Infinitas frequências naturais;
  - Infinitos modos normais;
  - Vibração livre: superposição dos modos normais;

Sistemas Contínuos



Vibração lateral de um cabo tenso

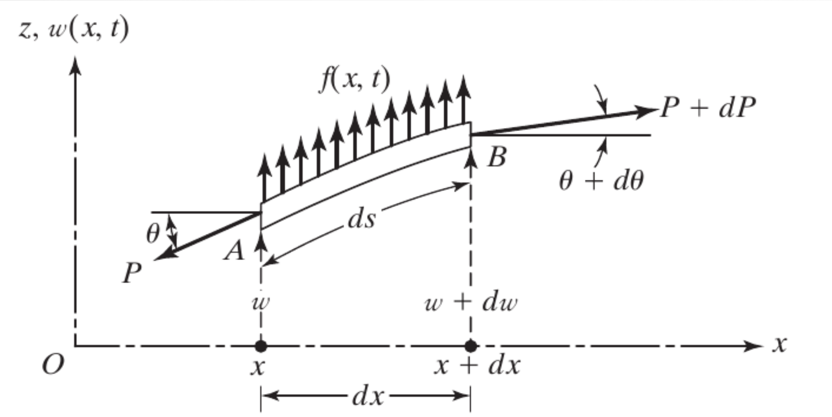
Sistemas Contínuos



Equação de movimento

$$(P + dP)\sin(\theta + d\theta) + f\,dx - P\sin\theta = \rho\,dx\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Sistemas Contínuos



Para um elemento infinitesimal:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

$$\sin\theta \simeq \tan\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\sin(\theta + d\theta) \simeq \tan(\theta + d\theta) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

Sistemas Contínuos

Introduzindo na eq. de equilíbrio

$$(P + dP)\sin(\theta + d\theta) + f\,dx - P\sin\theta = \rho\,dx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] + f(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

Para um cabo uniforme, com tensão constante

$$P\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

Sistemas Contínuos

Para vibração livre

$$P\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

Ou, na forma da *Equação de Onda*

$$c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$c = \left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2}$$

Sistemas Contínuos

- Condições Iniciais e de Contorno
  - Posição conhecida no tempo 0;
  - Velocidade conhecida no tempo 0;
  - Extremidades fixas ao longo de todo o tempo;

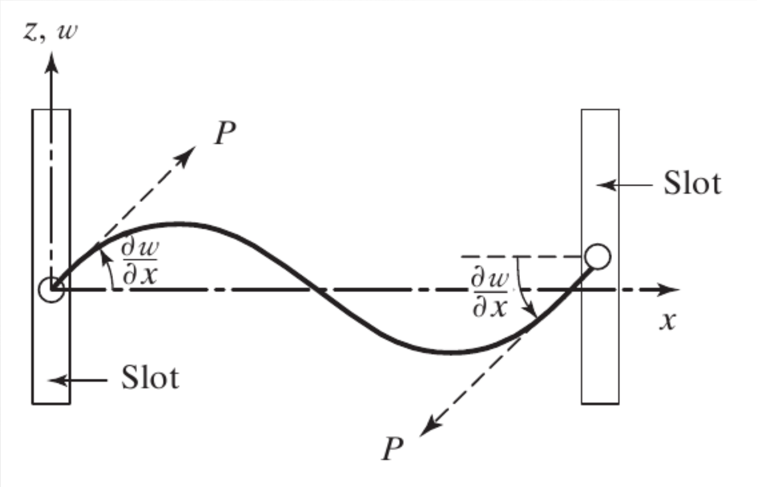
$$w(x, t = 0) = w_0(x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x)$$

$$w(x = 0, t) = 0, \qquad t \geq 0$$

Sistemas Contínuos

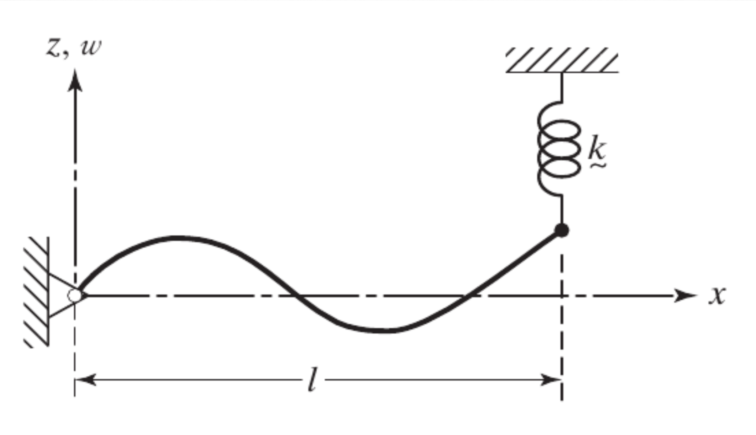
- Condições Contorno Alternativa:
  - Extremidades Pinadas;
  - Não suportam esforços transversais;



$$P(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}=0$$

Sistemas Contínuos

- Condições Contorno Alternativa:
  - Extremidade com apoio elástico;



$$P(x)\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = -\underset{\sim}{k}\,w(x,t)\,|_{x=l}, \qquad t \geq 0$$

Sistemas Contínuos

- Equação diferencial linear *parcial*, em x e t;
- Solução pelo método da *separação de variáveis*;
- A solução é um produto de funções de x apenas e t apenas;

$$w(x, t) = W(x)T(t)$$

Sistemas Contínuos

- Introduzindo na equação de onda;

$$\frac{c^2}{W}\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

$$\frac{c^2}{W}\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = a$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{a}{c^2}W = 0$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} - aT = 0$$

Sistemas Contínuos

- Fazendo

$$a = -\omega^2$$

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}W = 0$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$$

Sistemas Contínuos

- As soluções das equações são

$$W(x) = A\cos\frac{\omega x}{c} + B\sin\frac{\omega x}{c}$$

$$T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

Sistemas Contínuos

Para o cabo fixo em ambas as extremidades:

$$w(0, t) = w(l, t) = 0$$

O que leva a: $W(0)=0$ e $W(l)=0$

e $A=0$ e $B\sin\frac{\omega l}{c}=0$

Para uma solução não trivial $\sin\frac{\omega l}{c}=0$

Sistemas Contínuos

Equação de *frequências* ou *característica*

$$\sin\frac{\omega l}{c} = 0$$

ω: autovalores ou frequências naturais

$$\frac{\omega_n l}{c} = n\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\omega_n = \frac{nc\pi}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Sistemas Contínuos

A solução completa para uma frequência específica é

$$w_n(x, t) = W_n(x)T_n(t) = \sin\frac{n\pi x}{l}\left[C_n \cos\frac{nc\pi t}{l} + D_n \sin\frac{nc\pi t}{l}\right]$$

C_n e D_n: constantes a serem determinadas

$w_n(x,t)$: enésimo modo normal
enésimo hamônico
enésimo modo de vibração

$W_n(x)$: enésimo modo normal

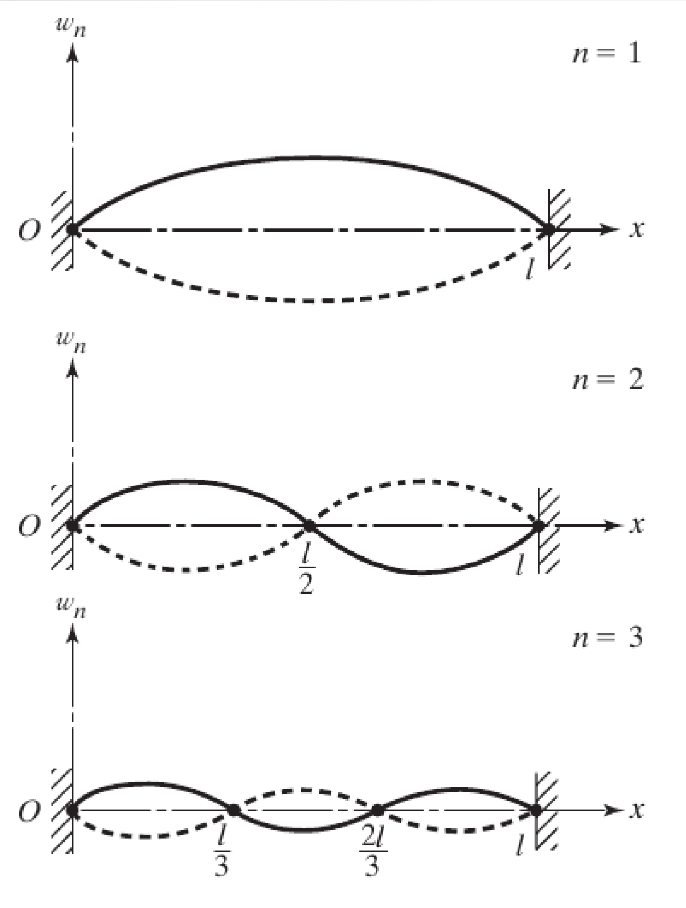
Sistemas Contínuos

$$\omega_n = \frac{n c \pi}{l}: \text{ frequência circular do enésimo modo}$$

$$\omega_1: \text{ frequência fundamental}$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2l}{c}: \text{ período fundamental}$$

Sistemas Contínuos



Os pontos para os quais

$$w_n(x,t) = 0, \quad t \geq 0$$

são *nós* da corda.

Sistemas Contínuos

A solução geral é dada pela superposição de todos os modos normais:

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left[C_n \cos\frac{nc\pi t}{l} + D_n \sin\frac{nc\pi t}{l}\right]
\end{aligned}
$$

Sistemas Contínuos

Para um determinado conjunto de condições iniciais:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{l} = w_0(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{l} D_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \dot{w}_0(x)$$

Sistemas Contínuos

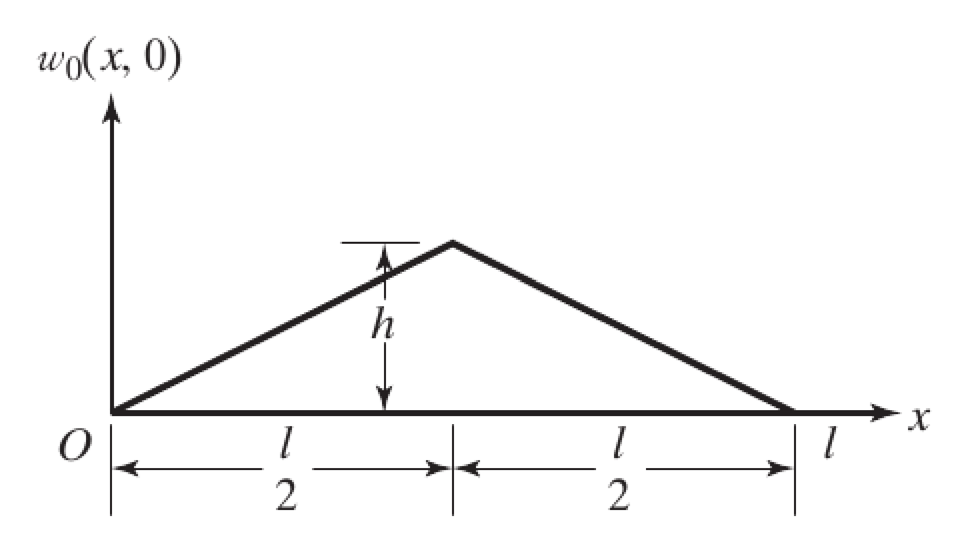
Calculando as constantes:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l w_0(x)\,\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$D_n = \frac{2}{nc\pi}\int_0^l \dot{w}_0(x)\,\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Sistemas Contínuos

Exemplo



Com velocidade inicial nula.

Sistemas Contínuos

Obviamente: $D_n = 0.$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{nc\pi t}{l}$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l w_0(x)\,\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Sistemas Contínuos

A condição inicial é:

$$w_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{l} & \text{for } 0 \leq x \leq \dfrac{l}{2} \\[2ex] \dfrac{2h(l - x)}{l} & \text{for } \dfrac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

Sistemas Contínuos

Calculando os coeficientes de Fourier

$$C_n = \frac{2}{l}\left\{\int_0^{l/2} \frac{2hx}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx + \int_{l/2}^{l}\frac{2h}{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{8h}{\pi^2 n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2} & \text{for } n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & \text{for } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

Sistemas Contínuos

Sabendo que

$$\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{(n-1)/2}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

A solução fica

$$w(x, t) = \frac{8h}{\pi^2}\left\{\sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi c t}{l} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi c t}{l} + \cdots\right\}$$

Sistemas Contínuos

Considerando que o cabo seja infinito, a solução pode ser escrita como

$$w(x,t) = w_1(x - ct) + w_2(x + ct)$$

$w_{1,}\, w_2$: funções arbitrárias de x e t

Sistemas Contínuos

Verificação

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = w_1''(x - ct) + w_2''(x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = c^2 w_1''(x - ct) + c^2 w_2''(x + ct)$$

Que obviamente satisfazem a eq. de onda para quaisquer funções *w* razoáveis.

$w_1(x-ct)$: onda que se propaga na direção positiva

$w_2(x+ct)$: onda que se propaga na direção negativa

$w_1(x-ct)$: onda que se propaga na direção positiva

$w_2(x+ct)$: onda que se propaga na direção negativa

Aplicando as condições iniciais

$$\begin{aligned} w_1(x) + w_2(x) &= w_0(x) \\ -cw_1'(x) + cw_2'(x) &= \dot{w}_0(x) \end{aligned}$$

Sistemas Contínuos

Integrando a equação de velocidade

$$-w_1(x) + w_2(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \dot{w}_0(x')\, dx'$$

Resolvendo o sistema de equações

$$w_1(x) = \frac{1}{2}\left[w_0(x) - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \dot{w}_0(x')\, dx' \right]$$

$$w_2(x) = \frac{1}{2}\left[w_0(x) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \dot{w}_0(x')\, dx' \right]$$

Sistemas Contínuos

Considerando a evolução no tempo

$$w(x, t) = w_1(x - ct) + w_2(x + ct)$$

$$= \frac{1}{2}[w_0(x - ct) + w_0(x + ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \dot{w}_0(x')\, dx'$$

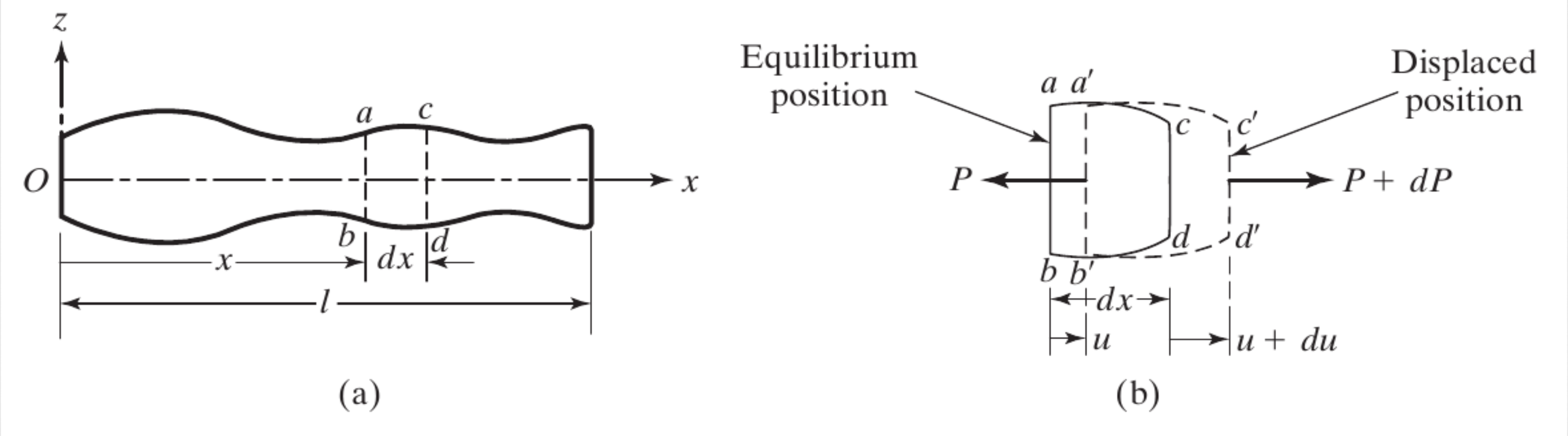
A solução pode ser escrita como

$$w(x, t) = w_D(x, t) + w_V(x, t)$$

Sistemas Contínuos

Vibração Longitudinal de Uma Barra

Sistemas Contínuos



Forças que agem em uma seção

$$P = \sigma A = EA\frac{\partial u}{\partial x}$$

Sistemas Contínuos

Equlíbrio de Forças para um elemento

$$(P + dP) + f\,dx - P = \rho A\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + f(x,t) = \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

Sistemas Contínuos

Para uma barra uniforme

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

No caso de vibração livre

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Sistemas Contínuos

Esta equação é uma equação de onda, completamente análoga àquela da corda em vibração lateral.

A solução é dada por

$$u(x,t) = U(x)T(t) \equiv \left(\underset{\sim}{A} \cos\frac{\omega x}{c} + \underset{\sim}{B} \sin\frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

Sistemas Contínuos

A função *U(x)* depende de *x* apenas, e é um **modo normal**, e *T(t)* depende apenas de *t*.

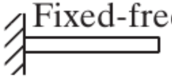
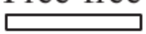
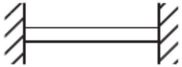
Condições Iniciais

$$u(x, t = 0) = u_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{u}_0(x)$$

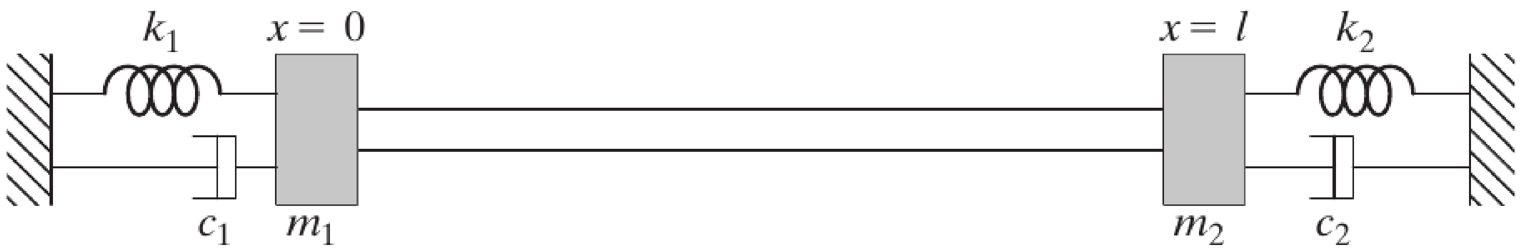
Sistemas Contínuos

Condições de contorno usuais e soluções

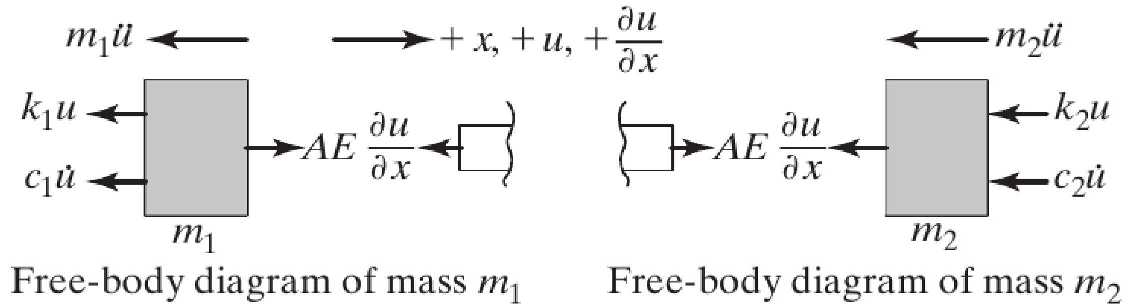
End Conditions of Bar	Boundary Conditions	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Natural Frequencies
Fixed-free 	$u(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Free-free 	$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
Fixed-fixed 	$u(0, t) = 0$ $u(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

Sistemas Contínuos

Exemplo: CC não usuais



(a)



(b)

Sistemas Contínuos

Na extremidade esquerda

$$AE\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = k_1 u(0,t) + c_1\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) + m_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,t)$$

Na extremidade direita

$$AE\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -k_2 u(l,t) - c_2\frac{\partial u}{\partial t}(l,t) - m_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t)$$

Sistemas Contínuos

Os modos normais para a barra em vibração longitudinal satisfazem

$$\int_0^l U_i(x)U_j(x)\,dx = 0$$

Isto é conhecido como a **ortogonalidade** dos modos normais.

Sistemas Contínuos

Verificação

$$u(x,t) = U_i(x)T(t)$$

$$u(x,t) = U_j(x)T(t)$$

Introduzindo na eq. de onda

$$c^2 \frac{d^2U_i(x)}{dx^2} + \omega_i^2 U_i(x) = 0 \quad \text{or} \quad c^2 U_i''(x) + \omega_i^2 U_i(x) = 0$$

$$c^2 \frac{d^2U_j(x)}{dx^2} + \omega_j^2 U_j(x) = 0 \quad \text{or} \quad c^2 U_j''(x) + \omega_j^2 U_j(x) = 0$$

Sistemas Contínuos

Multiplicando cada equação pela outro modo

$$c^2 U_i'' U_j + \omega_i^2 U_i U_j = 0$$

$$c^2 U_j'' U_i + \omega_j^2 U_j U_i = 0$$

Subtraindo e integrando de 0 a *l*

$$\int_0^l U_i U_j \, dx = -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \int_0^l \left(U_i'' U_j - U_j'' U_i \right) dx$$

$$= -\frac{c^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \left[U_i' U_j - U_j' U_i \right] \Big|_0^l$$

Sistemas Contínuos

O lado direito desta equação é 0 para qualquer combinação de condições de contorno!

Por exemplo, para uma barra fixa – livre

$$
\begin{aligned}
u(0, t) &= 0, \qquad t \geq 0 \qquad \text{or} \qquad U(0) = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) &= 0, \qquad t \geq 0 \qquad \text{or} \qquad U'(l) = 0
\end{aligned}
$$

Sistemas Contínuos

Exemplo: Barra fixa—livre em vibração longitudina

$$u(x,t) = U(x)T(t) \equiv \left(\underset{\sim}{A} \cos \frac{\omega x}{c} + \underset{\sim}{B} \sin \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

$$\underset{\sim}{A} = 0$$

$$\underset{\sim}{B} \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0 \qquad \text{or} \qquad \cos \frac{\omega l}{c} = 0$$

Sistemas Contínuos

As frequências naturais são dadas por

$$\cos\frac{\omega l}{c} = 0$$

$$\frac{\omega_n l}{c} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\omega_n = \frac{(2n + 1)\pi c}{2l}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Sistemas Contínuos

Solução geral é

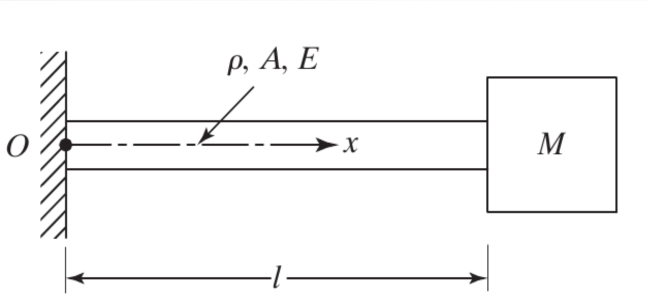
$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\left[C_n \cos\frac{(2n+1)\pi c t}{2l} + D_n \sin\frac{(2n+1)\pi c t}{2l}\right]
\end{aligned}
$$

$$
C_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\,\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx
$$

$$
D_n = \frac{4}{(2n+1)\pi c}\int_0^l \dot{u}_0(x)\,\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx
$$

Sistemas Contínuos

Exemplo: Barra com massa concentrada



Condição de contorno “fácil”

$$u(0,t) = 0$$

$$\underset{\sim}{A} = 0$$

Sistemas Contínuos

Na outra extremidade, equilíbrio de forças na massa

$$AE\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t)$$

$$AE\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega l}{c}(C\cos\omega t + D\sin\omega t) = M\omega^2\sin\frac{\omega l}{c}(C\cos\omega t + D\sin\omega t)$$

$$\frac{AE\omega}{c}\cos\frac{\omega l}{c} = M\omega^2\sin\frac{\omega l}{c}$$

$$\alpha\tan\alpha = \beta$$

$$\alpha = \frac{\omega l}{c}$$

$$\beta = \frac{AEl}{c^2M} = \frac{A\rho l}{M} = \frac{m}{M}$$

Sistemas Contínuos

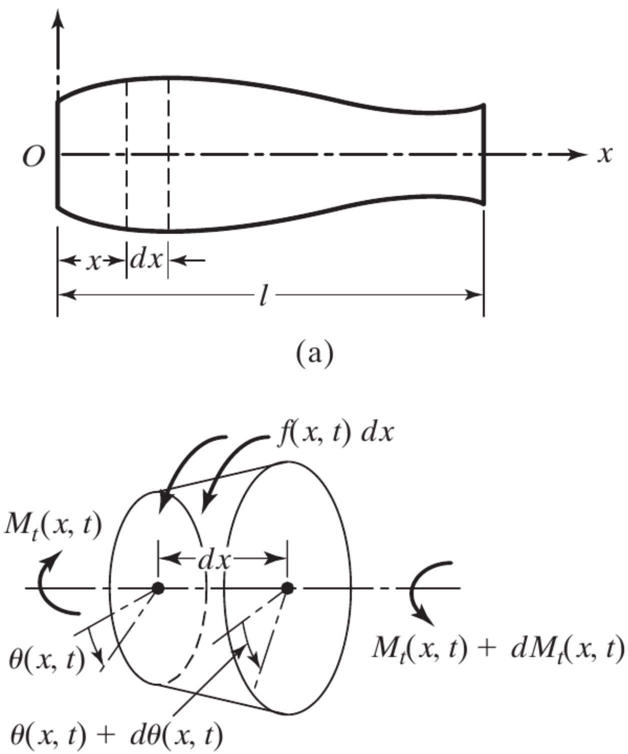
- A eq. característica é uma equação transcedental que não tem soluções analíticas;
- Para cada razão de massas, a equação tem infinitas soluções (frequências naturais) e os correspondentes modos

	Values of the Mass Ratio β				
	0.01	**0.1**	**1.0**	**10.0**	**100.0**
Value of α_1 $\left(\omega_1 = \dfrac{\alpha_1 c}{l}\right)$	0.1000	0.3113	0.8602	1.4291	1.5549
Value of α_2 $\left(\omega_2 = \dfrac{\alpha_2 c}{l}\right)$	3.1448	3.1736	3.4267	4.3063	4.6658

Sistemas Contínuos

Vibração em Torção de Eixo ou Árvore

Sistemas Contínuos



(a)

(b)

O momento de torção em uma seção é

$$M_t(x,t) = GJ(x)\,\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,t)$$

O torque de inércia no elemento infinitesimal é

$$I_0\,dx\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Sistemas Contínuos

Segunda lei de Newton

$$(M_t + dM_t) + f\,dx - M_t = I_0\,dx\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

Novamente

$$dM_t = \frac{\partial M_t}{\partial x}dx$$

O que leva a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GJ(x)\,\frac{\partial\theta}{\partial x}(x, t)\right] + f(x, t) = I_0(x)\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(x, t)$$

Sistemas Contínuos

Para um eixo uniforme

$$GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) = I_0\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(x,t)$$

Para vibração livre

$$c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(x,t)$$

$$c = \sqrt{\frac{GJ}{I_0}}$$

Sistemas Contínuos

Se o eixo tem seção transversal uniforme

$$I_0 = \rho J$$

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Sistemas Contínuos

Condições Iniciais

$$\theta(x, t = 0) = \theta_0(x)$$

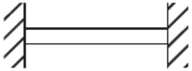
$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{\theta}_0(x)$$

Solução Geral

$$\theta(x, t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}\right)(C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

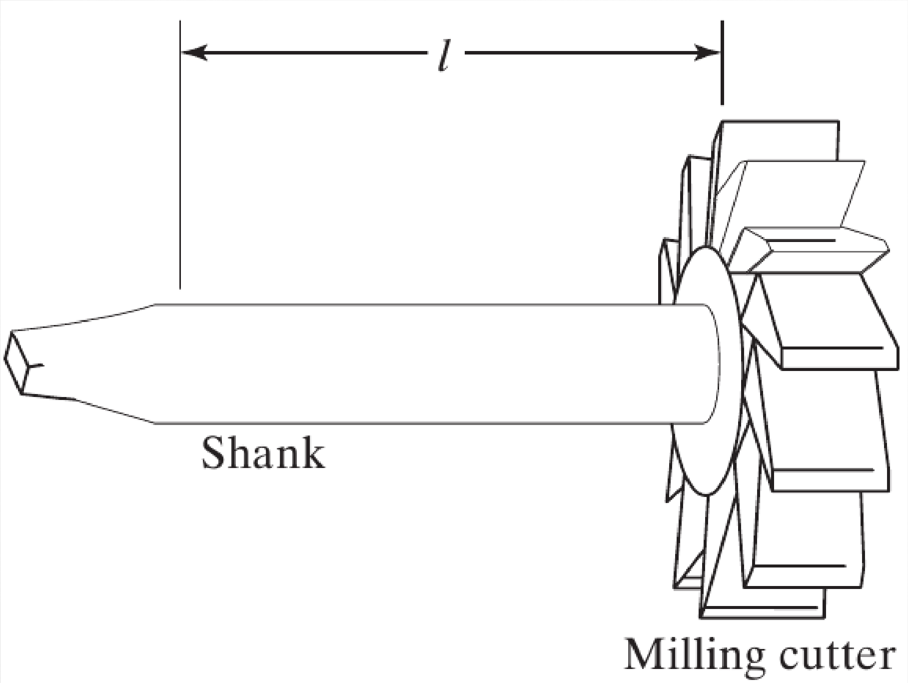
Sistemas Contínuos

Condições de contorno usuais e soluções

End Conditions of Shaft	Boundary Conditions	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Natural Frequencies
Fixed-free 	$\theta(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$\theta(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l};$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
Free-free 	$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$\theta(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l};$ $n = 0, 1, 2, \ldots$
Fixed-fixed 	$\theta(0, t) = 0$ $\theta(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$\theta(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l};$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

Sistemas Contínuos

Exemplo



Considerar a extremidade esquerda fixa

Sistemas Contínuos

Solução geral

$$\theta(x, t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}\right)(C \cos \omega t + D \sin \omega t)$$

$$\text{CC:} \quad \theta(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

Para $x = l$

$$GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = -I_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(l, t)$$

$$BGJ \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = BI_0 \omega^2 \sin \frac{\omega l}{c}$$

Sistemas Contínuos

$$\frac{\omega l}{c} \tan \frac{\omega l}{c} = \frac{J\rho l}{I_0} = \frac{\underset{\sim}{J}_{\text{rod}}}{I_0}$$

$$\underset{\sim}{J}_{\text{rod}} = J\rho l$$

$$\alpha \tan \alpha = \beta$$

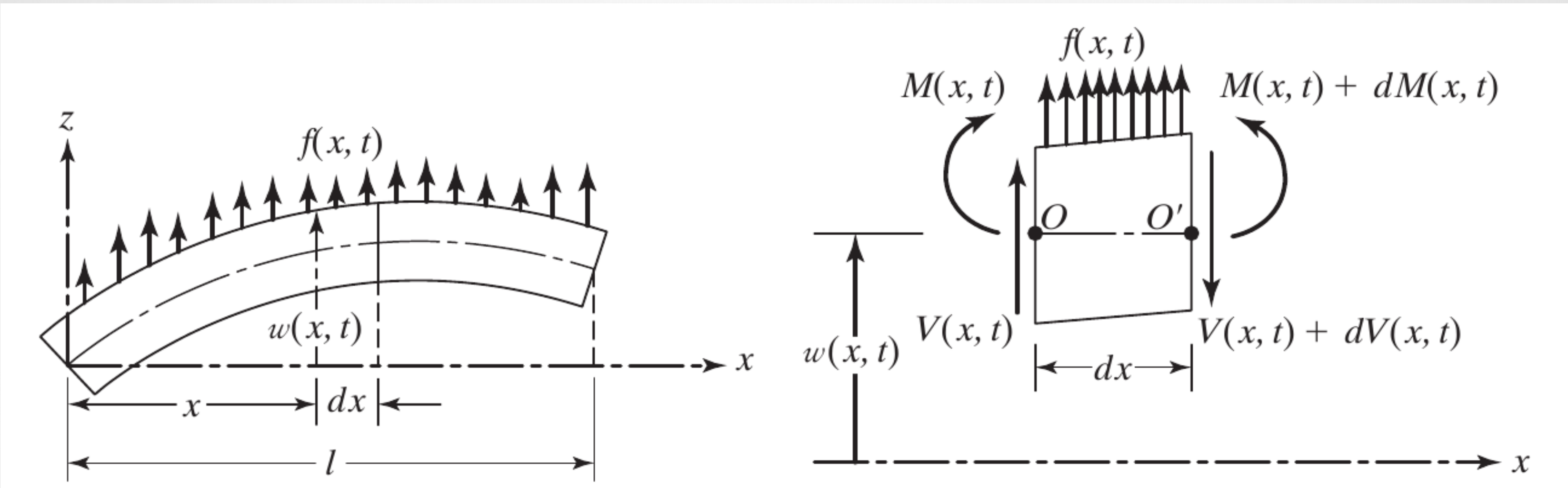
$$\alpha = \frac{\omega l}{c}$$

$$\beta = \frac{\underset{\sim}{J}_{\text{rod}}}{I_0}$$

Sistemas Contínuos

Vibração Transversal de Vigas

Sistemas Contínuos



Considerando teoria clássica de vigas esbeltas!

$M(x,t)$: momento fletor

$V(x,t)$: esforço cisalhante

$f(x,t)$: força externa por unidade de comprimento

Sistemas Contínuos

Força de inércia no elemento de viga

$$\rho A(x)\, dx\, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Equilíbrio de forças na direção vertical

$$-(V + dV) + f(x, t)\, dx + V = \rho A(x)\, dx\, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Equilíbrio de momentos em relação o *O*

$$(M + dM) - (V + dV)\, dx + f(x, t)\, dx\, \frac{dx}{2} - M = 0$$

Sistemas Contínuos

Como sempre

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \qquad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

As equações de movimento tornam-se

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0$$

Sistemas Contínuos

Introduzindo a segunda eq. na primeira

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

Da teoria de Euler-Bernoulli

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t)$$

Sistemas Contínuos

Para uma viga não uniforme então

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t)\right] + \rho A(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t)$$

Se a viga é uniforme

$$EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t)$$

Sistemas Contínuos

Para vibração livre

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Sistemas Contínuos

- 2ª ordem no tempo: 2 condições iniciais;
- 4ª ordem no espaço: 4 condições de contorno
- Solução por separação de variáveis;

Condições iniciais:

$$w(x, t = 0) = w_0(x)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x)$$

Sistemas Contínuos

Separação de variáveis

$$w(x,t) = W(x)T(t)$$

Substituindo na eq. de movimento

$$\frac{c^2}{W(x)}\frac{d^4W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = a = \omega^2$$

O que leva a

$$\frac{d^4W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0$$

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

Sistemas Contínuos

A solução geral da equação temporal é

$$T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Para a eq. do espaço, supomos

$$W(x) = Ce^{sx}$$

o que leva a

$$s^4 - \beta^4 = 0$$

com raízes

$$s_{1,2} = \pm\beta, \qquad s_{3,4} = \pm i\beta$$

Sistemas Contínuos

A solução geral é então

$$W(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}$$

Alternativamente

$$W(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x$$

ou

$$W(x) = C_1(\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2(\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_3(\sin \beta x + \sinh \beta x) + C_4(\sin \beta x - \sinh \beta x)$$

Sistemas Contínuos

As constantes devem ser determinadas a partir das condições de contorno!

As frequências naturais saem de

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

Sistemas Contínuos

Condições de contorno usuais

Extremidade livre: momento e cortante nulos

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0$$

Sistemas Contínuos

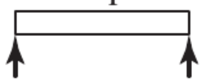
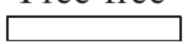
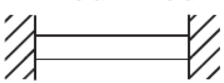
Extremidade pivotada: deslocamento e momento nul

$$w = 0, \qquad EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

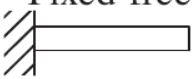
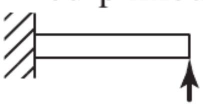
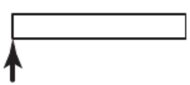
Extremidade engastada: deslocamento e rotação nul

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Sistemas Contínuos

End Conditions of Beam	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Value of $\beta_n l$
Pinned-pinned 	$\sin \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
Free-free 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$ ($\beta l = 0$ for rigid-body mode)
Fixed-fixed 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\sinh \beta_n x_n x - \sin \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$

Sistemas Contínuos

Fixed-free 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\dfrac{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 1.875104$ $\beta_2 l = 4.694091$ $\beta_3 l = 7.854757$ $\beta_4 l = 10.995541$
Fixed-pinned 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\dfrac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$
Pinned-free 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x + \alpha_n \sinh \beta_n x]$ where $\alpha_n = \left(\dfrac{\sin \beta_n l}{\sinh \beta_n l}\right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$ ($\beta l = 0$ for rigid-body mode)

Sistemas Contínuos

Exemplo: Viga fixa e simplesmente apoiada

Condições de Contorno

$$W(0) = 0$$

$$\frac{dW}{dx}(0) = 0$$

$$W(l) = 0$$

$$EI\frac{d^2W}{dx^2}(l) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d^2W}{dx^2}(l) = 0$$

Sistemas Contínuos

Da primeira condição

$$C_1 + C_3 = 0$$

Da segunda condição

$$\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x=0} = \beta[-C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x]_{x=0} = 0$$

$$\beta[C_2 + C_4] = 0$$

Sistemas Contínuos

A solução torna-se

$$W(x) = C_1(\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_2(\sin \beta x - \sinh \beta x)$$

Com as demais condições

$$\begin{aligned} C_1(\cos \beta l - \cosh \beta l) + C_2(\sin \beta l - \sinh \beta l) &= 0 \\ -C_1(\cos \beta l + \cosh \beta l) - C_2(\sin \beta l + \sinh \beta l) &= 0 \end{aligned}$$

Sistemas Contínuos

Para uma solução não trivial

$$\begin{vmatrix} (\cos \beta l - \cosh \beta l) & (\sin \beta l - \sinh \beta l) \\ -(\cos \beta l + \cosh \beta l) & -(\sin \beta l + \sinh \beta l) \end{vmatrix} = 0$$

Ou $$\cos \beta l \sinh \beta l - \sin \beta l \cosh \beta l = 0$$

Ou $$\tan \beta l = \tanh \beta l$$

As raízes desta equação são calculadas numericamen

Sistemas Contínuos

Cujas soluções são

$$\omega_n = (\beta_n l)^2 \left(\frac{EI}{\rho A l^4} \right)^{1/2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Da primeira equação de movimento

$$C_{2n} = -C_{1n} \left(\frac{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l} \right)$$

Sistemas Contínuos

Os modos normais de vibração são

$$W_n(x) = C_{1n}\left[(\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) - \left(\frac{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l}{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}\right)(\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x)\right]$$

A solução fica então (para uma frequência)

$$w_n(x, t) = W_n(x)\,(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

A solução geral é então

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t)$$