Vibrações Mecânicas

Sistemas com 2 Graus de Liberdade

DEMEC/CTG/UFPE

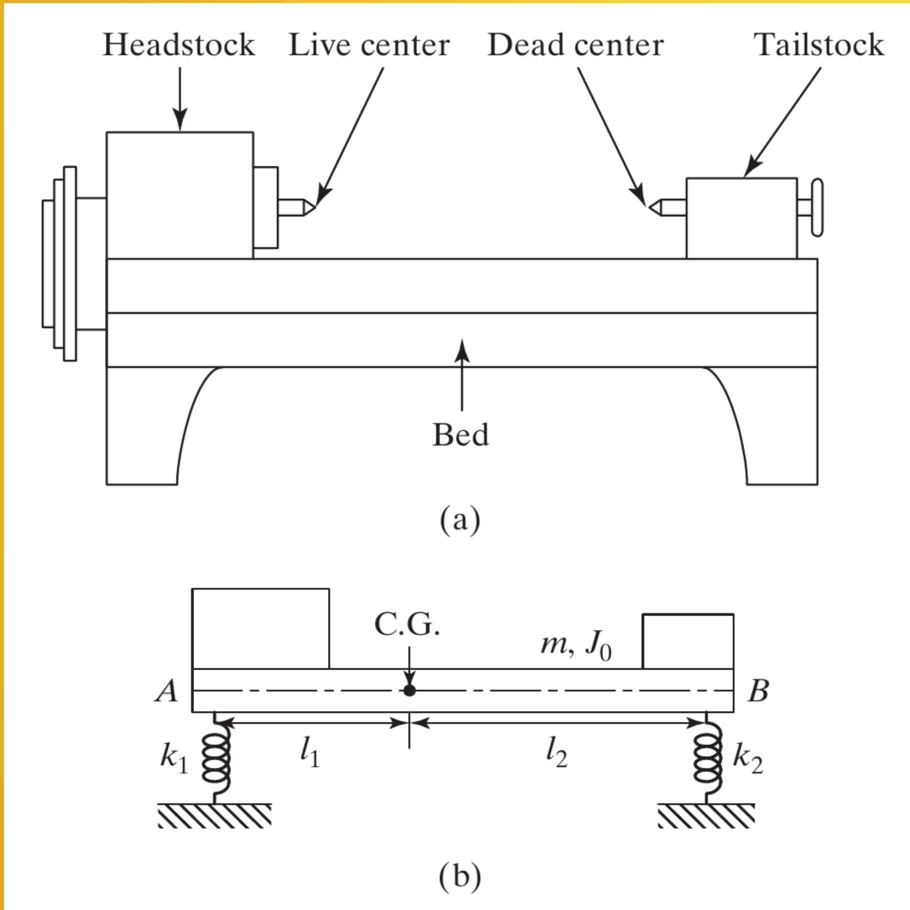
Ramiro Brito Willmersdorf

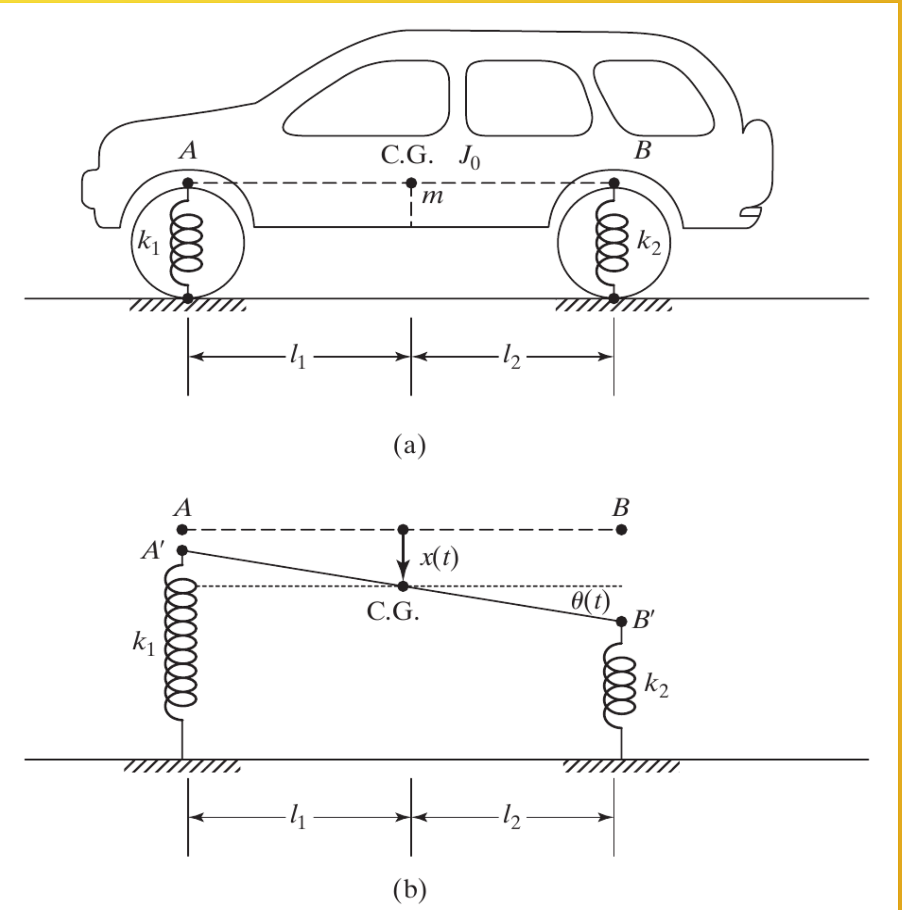
2015.1

Introdução

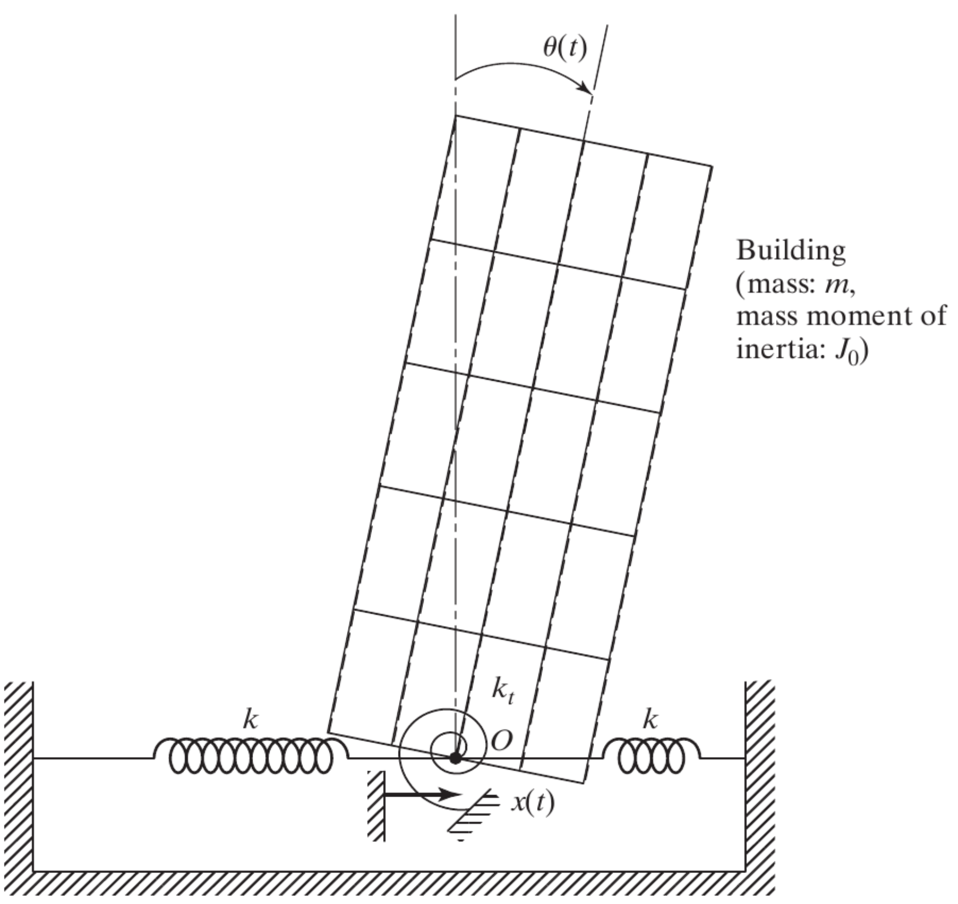
- Sistemas que requerem 2 coordenadas generalizadas para especificar unicamente sua configuração;
- 2 Equações de movimento;
- EDO acopladas;
- Resposta harmônica leva a 2 Frequências naturais

Exemplos

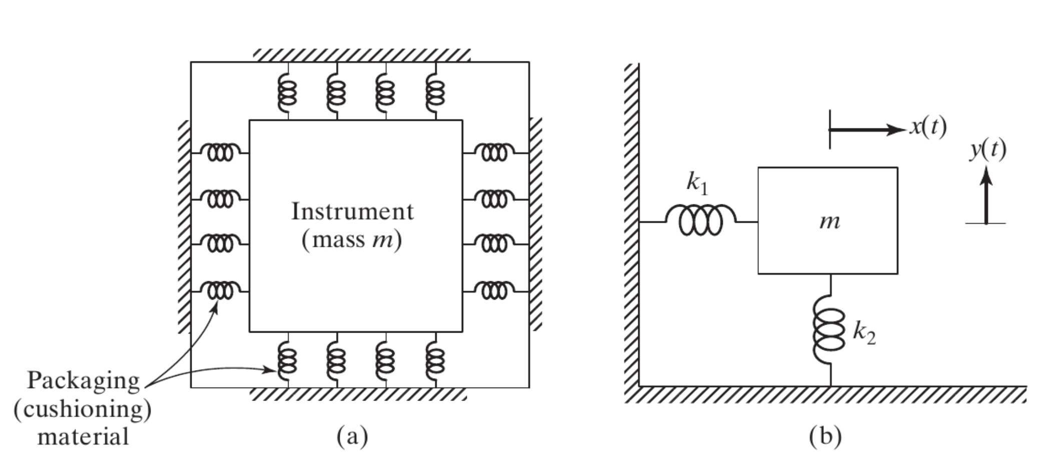

Headstock
Live center
Dead center
Tailstock
Bed
(a)
C.G.
m, J0
A
B
k1
l1
l2
k2
(b)


A
C.G.
J0
B
m
k1
k2
l1
l2
(a)
A
B
A′
x(t)
θ(t)
C.G.
B′
k1
k2
l1
l2
(b)

Exemplos



$\theta(t)$
Building
(mass: m,
mass moment of
inertia: J_0)
k_t
k
O
k
$x(t)$



Instrument
(mass m)
Packaging
(cushioning)
material
(a)
$x(t)$
$y(t)$
k_1
m
k_2
(b)

Características da Resposta

- A vibração livre é harmônica em cada uma das coordenadas generalizadas;
- A resposta é uma combinação linear de dois movimentos *de mesma frequência* e *em fase*;
- A cada frequência natural corresponde um *modo normal*, que é uma razão específica entre as amplitudes em cada coordenada generalizada;
- A vibração forçada ocorre na frequência da força de excitação;

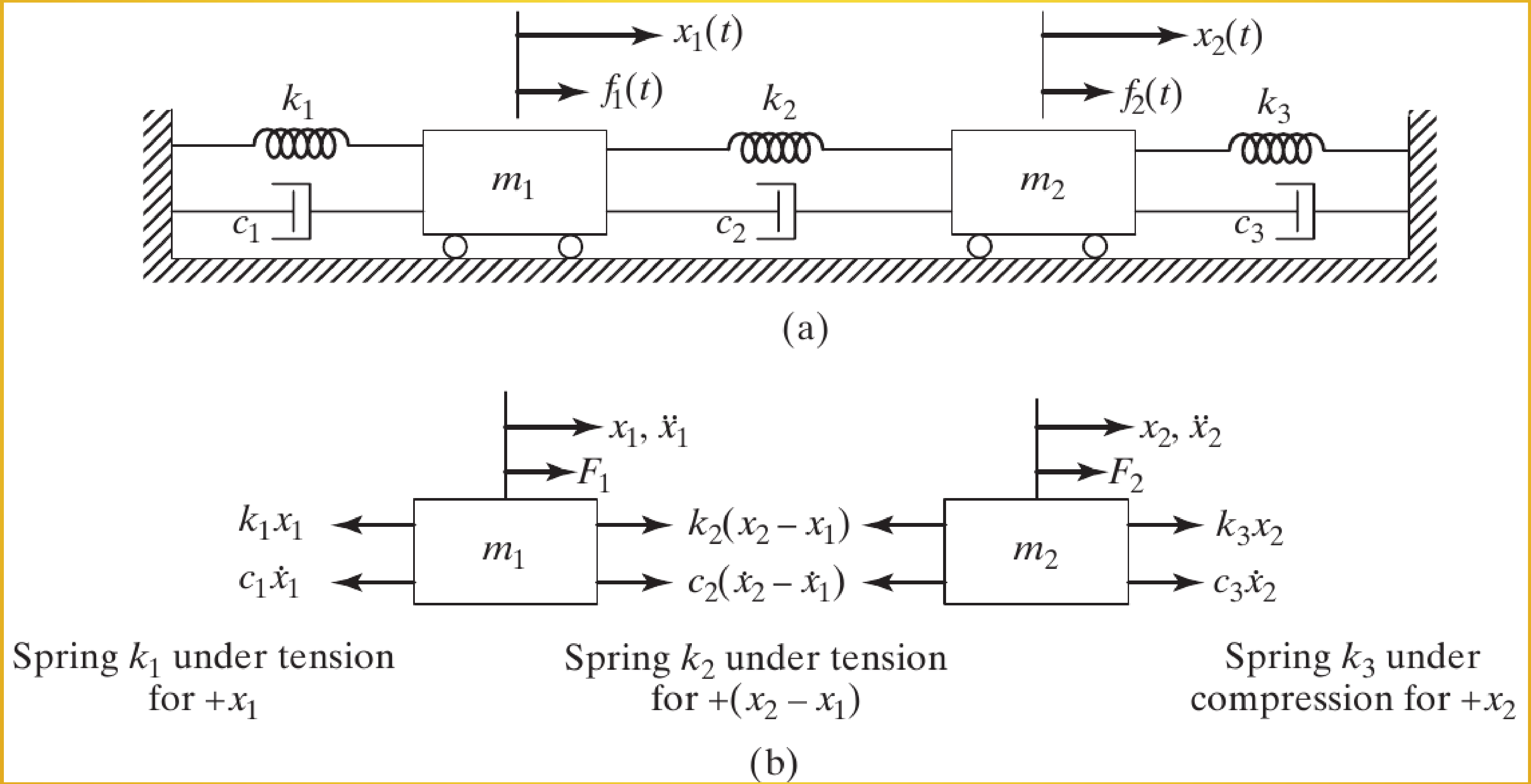
Características da Resposta

- Ressonância pode ocorrer quando a frequência de excitação corresponder a *qualquer uma* das frequências naturais do sistema.

Coordenadas Principais

- Sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas generalizadas no qual as equações de movimento são desacopladas;
- Este sistema determina as *coordenadas principais* do problema;

Equações de Movimento



Equações de Movimento

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2$$

$$[m]\ \ddot{\vec{x}}(t) + [c]\ \dot{\vec{x}}(t) + [k]\ \vec{x}(t) = \vec{f}(t)$$

Matrizes

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

Observação Importante

No caso

$$[m]^T = [m], \qquad [c]^T = [c], \qquad [k]^T = [k]$$

Isto é uma propriedade da dinâmica, estas matrizes serão **sempre** *simétricas*!

Vibração Livre

- Considerando as forças externas e amortecimento nulos

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0$$

Vamos supor que as respostas são *harmônicas*, de *mesma frequência* e *em fase*

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \phi)$$

Vibração Livre – Equação Característica

Substituindo nas equações de movimento

$$[\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2]\cos(\omega t + \phi) = 0$$

$$[-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2]\cos(\omega t + \phi) = 0$$

Para serem válidas para qualquer tempo:

$$\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2 = 0$$

$$-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2 = 0$$

Vibração Livre – Equação Característica

Para uma solução não trivial

$$\det \begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} = 0$$

ou,

$$(m_1 m_2)\omega^4 - \{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\}\omega^2 + \{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2\} = 0$$

Vib. Livre – Equação Característica

Esta é uma equação biquadrática, cujas raízes são

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\}$$

$$\mp \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\}^2\right.$$

$$\left. - 4\left\{\frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1 m_2}\right\}\right]^{1/2}$$

Vibração Libre – Frequências Naturais

- As raízes desta equação são *as únicas* frequências para as quais é possível haver uma solução harmônica não trivial para o sistema;
- São chamadas portanto de *frequências naturais* do sistema;
- Força elástica = Força de inércia; Energia Potencial + Energia Cinética cte, etc.

Vibração Livre – Amplitudes

- Qualquer múltiplo da solução de um sistema indeterminado é também uma solução!
- A amplitude absoluta (para vibração livre) não tem nenhum valor, apenas a razão entre as amplitudes de cada GL importa;
- Esta razão de amplitudes configura um *modo normal* de vibração;

Vibração Livre – Razão de Amplitudes

Inserindo as frequências naturais no sistema de equações

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)}$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)}$$

Vibração Livre – Modos Normais

Os modos normais são então

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Vibração Livre – Modos Normais

A hipótese inicial foi:

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \phi)$$

Mas encontramos 2 valores para a amplitude, um para cada frequência natural.

Resposta

- Inocentemente, as soluções poderiam ser a vibração em um modo ou no outro, isto é:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix} = \text{first mode}$$

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix} = \text{second mode}$$

Normalmente não acontece nenhuma das duas coisas!

Resposta Total

- Como o sistema precisa de quatro constantes de integração, não podemos usar um único modo;
- A resposta tem que ser uma combinação linear dos modos;

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}^{(1)}(t) + c_2 \vec{x}^{(2)}(t)$$

Resposta Total

- Como os modos são os mesmos quando multiplicados por uma constante, podemos ignorar as constantes c_i!

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t) = X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\
x_2(t) &= x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t) \\
&= r_1 X_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 X_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \phi_2)
\end{aligned}
$$

Resposta Total – Condições Iniciais

$$
\begin{aligned}
x_1(0) &= X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2 \\
\dot{x}_1(0) &= -\omega_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2 \\
x_2(0) &= r_1 X_1^{(1)} \cos \phi_1 + r_2 X_1^{(2)} \cos \phi_2 \\
\dot{x}_2(0) &= -\omega_1 r_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 r_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2
\end{aligned}
$$

Sistema com 4 equaçõs algébricas *lineares*!

Condições Iniciais – Solução

$$X_1^{(1)} \cos \phi_1 = \left\{ \frac{r_2 x_1(0) - x_2(0)}{r_2 - r_1} \right\}, \qquad X_1^{(2)} \cos \phi_2 = \left\{ \frac{-r_1 x_1(0) + x_2(0)}{r_2 - r_1} \right\}$$

$$X_1^{(1)} \sin \phi_1 = \left\{ \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 (r_2 - r_1)} \right\}, \qquad X_1^{(2)} \sin \phi_2 = \left\{ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2 (r_2 - r_1)} \right\}$$

Condições Iniciais – Solução

$$X_1^{(1)} = [\{X_1^{(1)} \cos \phi_1\}^2 + \{X_1^{(1)} \sin \phi_1\}^2]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{r_2 x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2} \right]^{1/2}$$

$$X_1^{(2)} = [\{X_1^{(2)} \cos \phi_2\}^2 + \{X_1^{(2)} \sin \phi_2\}^2]^{1/2}$$

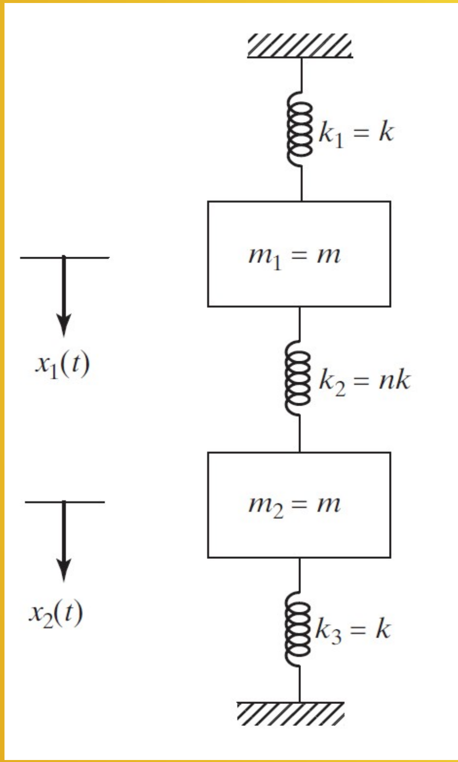
$$= \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{-r_1 x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2} \right]^{1/2}$$

Condições Iniciais – Solução

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left\{\frac{X_1^{(1)} \sin \phi_1}{X_1^{(1)} \cos \phi_1}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{-r_2\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1[r_2x_1(0) - x_2(0)]}\right\}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left\{\frac{X_1^{(2)} \sin \phi_2}{X_1^{(2)} \cos \phi_2}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{r_1\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2[-r_1x_1(0) + x_2(0)]}\right\}$$

Exemplo – n = 1



Equações de movimento

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

Supondo

$$x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \phi);\ i = 1, 2$$

Exemplo – Equação Característica

$$\begin{vmatrix} (-m\omega^2 + 2k) & (-k) \\ (-k) & (-m\omega^2 + 2k) \end{vmatrix} = 0$$

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

Exemplo – Frequências Naturais

$$\omega_1 = \left\{ \frac{4km - [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \left\{ \frac{4km + [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Resposta Total – Condições Iniciais

$$x_1(t = 0) = x_1(0), \qquad \dot{x}_1(t = 0) = \dot{x}_1(0),$$
$$x_2(t = 0) = x_2(0), \qquad \dot{x}_2(t = 0) = \dot{x}_2(0)$$

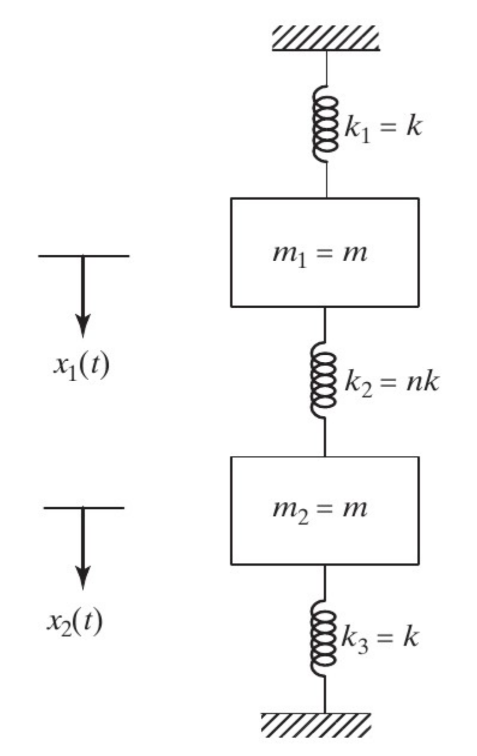
$$x_1(0) = X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2$$

$$\dot{x}_1(0) = -\omega_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2$$

$$x_2(0) = r_1 X_1^{(1)} \cos \phi_1 + r_2 X_1^{(2)} \cos \phi_2$$

$$\dot{x}_2(0) = -\omega_1 r_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 r_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2$$

Exemplo



Considerando n=1, e

$$x_i(t) = X_i \cos(\omega t + \phi);\ i = 1, 2$$

Colocando nas equações de movimento

$$\begin{vmatrix} (-m\omega^2 + 2k) & (-k) \\ (-k) & (-m\omega^2 + 2k) \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo – Equação Característica

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

Exemplo – Frequências Naturais

$$\omega_1 = \left\{\frac{4km - [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2}\right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \left\{\frac{4km + [16k^2m^2 - 12m^2k^2]^{1/2}}{2m^2}\right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Exemplo – Razões de Amplitude

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m\omega_1^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_1^2 + 2k} = 1$$

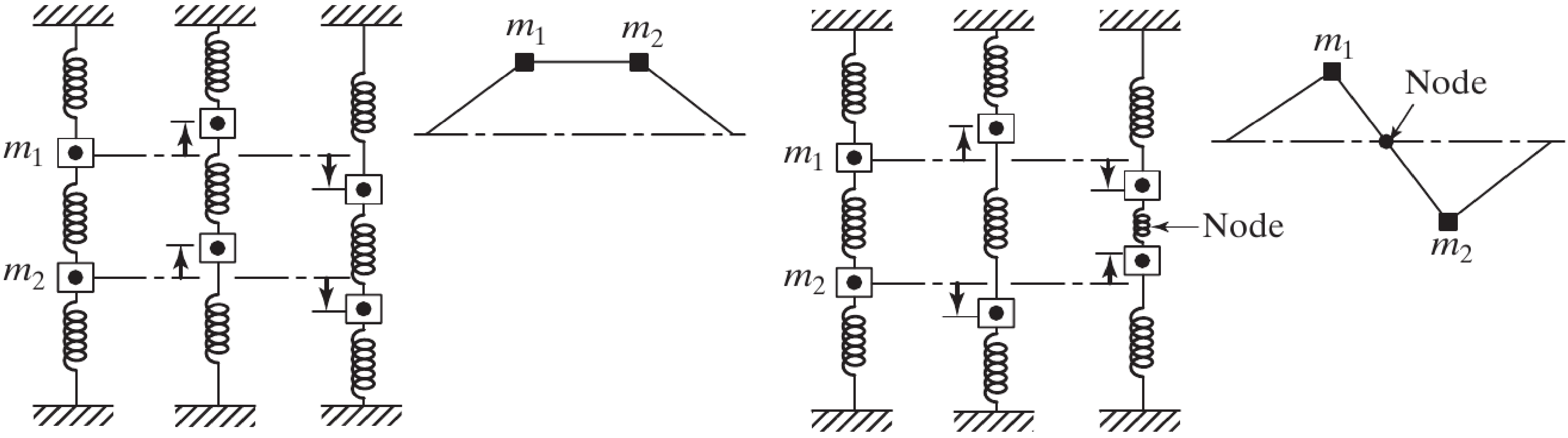
$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m\omega_2^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega_2^2 + 2k} = -1$$

Exemplo – Modos Normais

$$\begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right) \end{Bmatrix}$$

Exemplo – Modos Normais



(a) First mode

(b) Second mode

Exemplo – Solução Geral

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right)$$

$$x_2(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \phi_2\right)$$

Exemplo – Condições Iniciais

Encontrar as condições iniciais que façam o sistema ter vibração puramente no primeiro modo e puramente no segundo modo.

Exemplo – Condições Iniciais

Solução Geral

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) + X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right)$$

$$x_2(t) = X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_1\right) - X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right)$$

Exemplo – Condições Iniciais

Aplicando as condições iniciais:

$$X_1^{(1)} = -\frac{1}{2}\left\{[x_1(0) + x_2(0)]^2 + \frac{m}{k}[\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)]^2\right\}^{1/2}$$

$$X_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\left\{[-x_1(0) + x_2(0)]^2 + \frac{m}{3k}[\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]^2\right\}^{1/2}$$

Exemplo – Condições Iniciais

Aplicando as condições iniciais:

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left\{\frac{-\sqrt{m}\,[\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)]}{\sqrt{k}\,[x_1(0) + x_2(0)]}\right\}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{m}\,[\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)]}{\sqrt{3k}\,[-x_1(0) + x_2(0)]}\right\}$$

Exemplo – Condições Iniciais

Para o primeiro modo:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) \\ X_1^{(1)} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi_1\right) \end{Bmatrix}$$

Por inspeção:

$$X_1^{(2)} = 0$$

O que implica em

$$x_1(0) = x_2(0) \qquad \text{and} \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$$

Exemplo – Condições Iniciais

Para o segundo modo:

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \\ -X_1^{(2)} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_2\right) \end{Bmatrix}$$

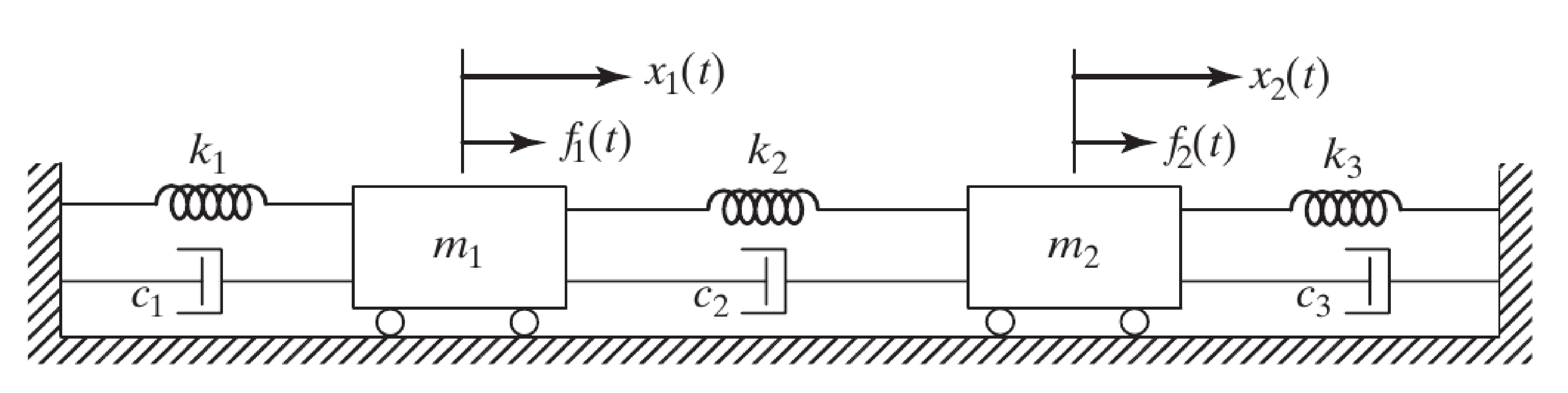
Por inspeção:

$$X_1^{(1)} = 0$$

O que implica em

$$x_1(0) = -x_2(0) \qquad \text{and} \qquad \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$$

Exemplo – Vibração Livre



$$k_1 = 30, k_2 = 5, k_3 = 0$$

$$m_1 = 10, m_2 = 1 \qquad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$x_1(0) = 1, \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

Exemplo – Equações de Movimento

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -10\omega^2 + 35 & -5 \\ -5 & -\omega^2 + 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Exemplo – Eq. Característica

$$10\omega^4 - 85\omega^2 + 150 = 0$$

Frequências Naturais

$$\omega_1^2 = 2.5, \qquad \omega_2^2 = 6.0$$

$$\omega_1 = 1.5811, \qquad \omega_2 = 2.4495$$

Exemplo – Razões de Amplitude

$$\omega^2 = \omega_1^2 = 2.5$$

$$X_2^{(1)} = 2X_1^{(1)}$$

$$\omega^2 = \omega_2^2 = 6.0$$

$$X_2^{(2)} = -5X_1^{(2)}$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} X_1^{(1)}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5 \end{Bmatrix} X_1^{(2)}$$

Exemplo – Solução Geral

$$x_1(t) = X_1^{(1)} \cos(1.5811t + \phi_1) + X_1^{(2)} \cos(2.4495t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = 2X_1^{(1)} \cos(1.5811t + \phi_1) - 5X_1^{(2)} \cos(2.4495t + \phi_2)$$

Exemplo – Condições Iniciais

$$x_1(t = 0) = 1 = X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2$$

$$x_2(t = 0) = 0 = 2X_1^{(1)} \cos \phi_1 - 5X_1^{(2)} \cos \phi_2$$

$$\dot{x}_1(t = 0) = 0 = -1.5811X_1^{(1)} \sin \phi_1 - 2.4495X_1^{(2)} \sin \phi_2$$

$$\dot{x}_2(t = 0) = -3.1622X_1^{(1)} + 12.2475X_1^{(2)} \sin \phi_2$$

Exemplo – Condições Iniciais

$$X_1^{(1)} \cos \phi_1 = \frac{5}{7}, \qquad X_1^{(2)} \cos \phi_2 = \frac{2}{7}$$

$$X_1^{(1)} \sin \phi_1 = 0, \qquad X_1^{(2)} \sin \phi_2 = 0$$

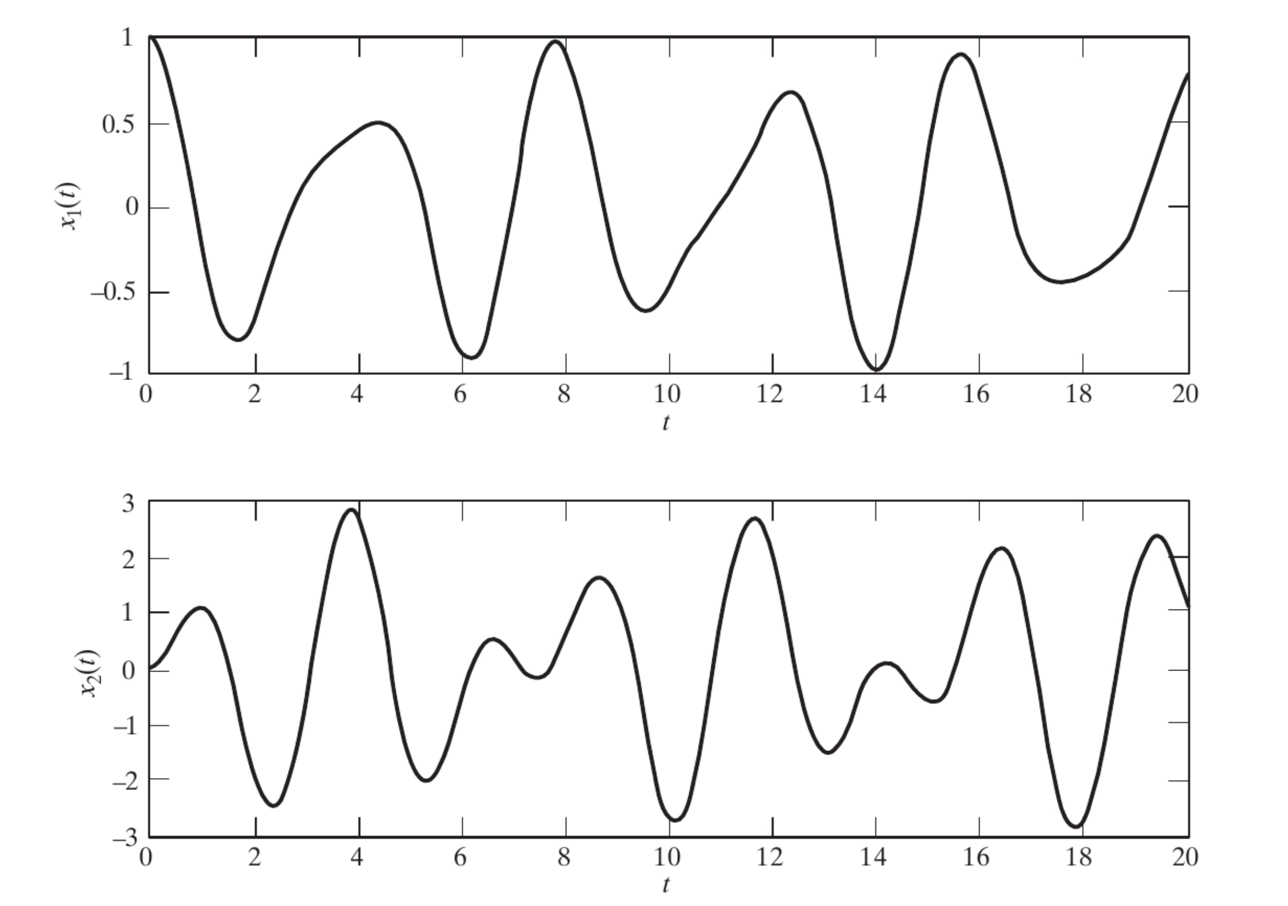
$$X_1^{(1)} = \frac{5}{7}, \qquad X_1^{(2)} = \frac{2}{7}, \qquad \phi_1 = 0, \qquad \phi_2 = 0$$

Exemplo – Solução

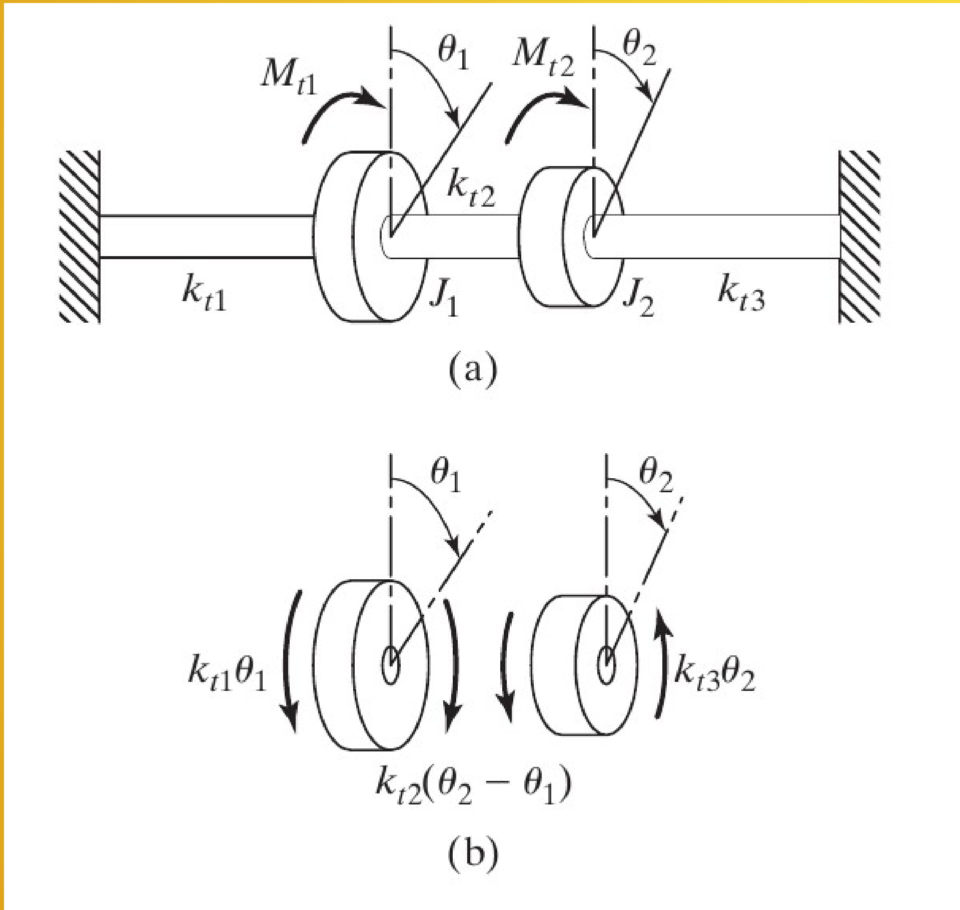
$$x_1(t) = \frac{5}{7}\cos 1.5811t + \frac{2}{7}\cos 2.4495t$$

$$x_2(t) = \frac{10}{7}\cos 1.5811t - \frac{10}{7}\cos 2.4495t$$

Exemplo – Solução



Sistema em Torção



$$J_1\ddot{\theta}_1 = -k_{t1}\theta_1 + k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) + M_{t1}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = -k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) - k_{t3}\theta_2 + M_{t2}$$

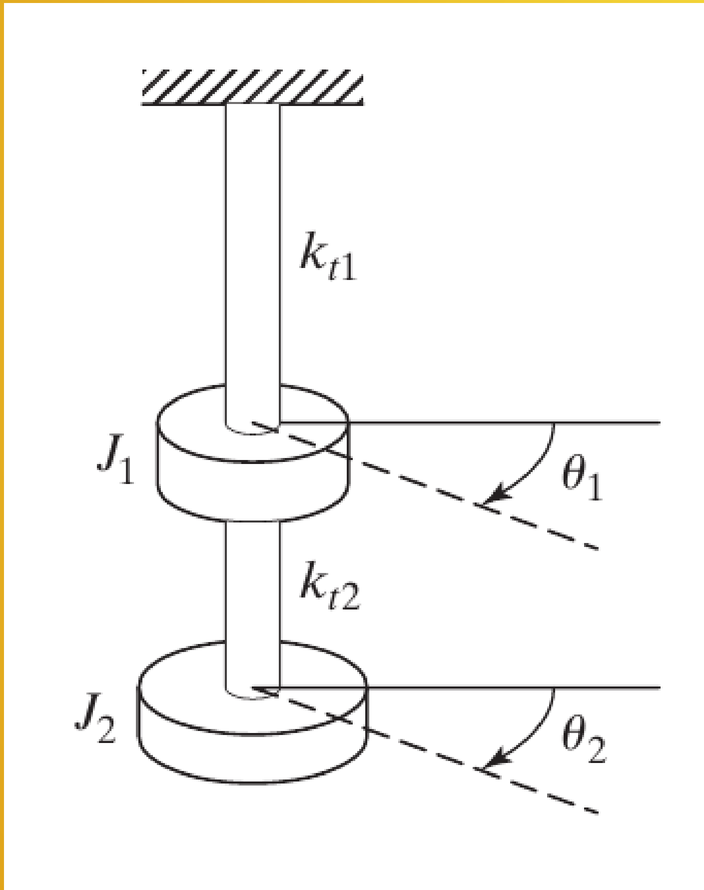
$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = M_{t1}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = M_{t2}$$

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = 0$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = 0$$

Sistema em Torção – Exemplo



$$J_1 = J_0, J_2 = 2J_0, k_{t1} = k_{t2} = k_t$$

Eq. de movimento

$$J_0\ddot{\theta}_1 + 2k_t\theta_1 - k_t\theta_2 = 0$$

$$2J_0\ddot{\theta}_2 - k_t\theta_1 + k_t\theta_2 = 0$$

Solução

$$\theta_i(t) = \Theta_i \cos(\omega t + \phi); \qquad i = 1, 2$$

Sistema em Torção – Exemplo

Eq. de frequências

$$2\omega^4 J_0^2 - 5\omega^2 J_0 k_t + k_t^2 = 0$$

Frequências naturais

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_t}{4J_0}(5 - \sqrt{17})}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_t}{4J_0}(5 + \sqrt{17})}$$

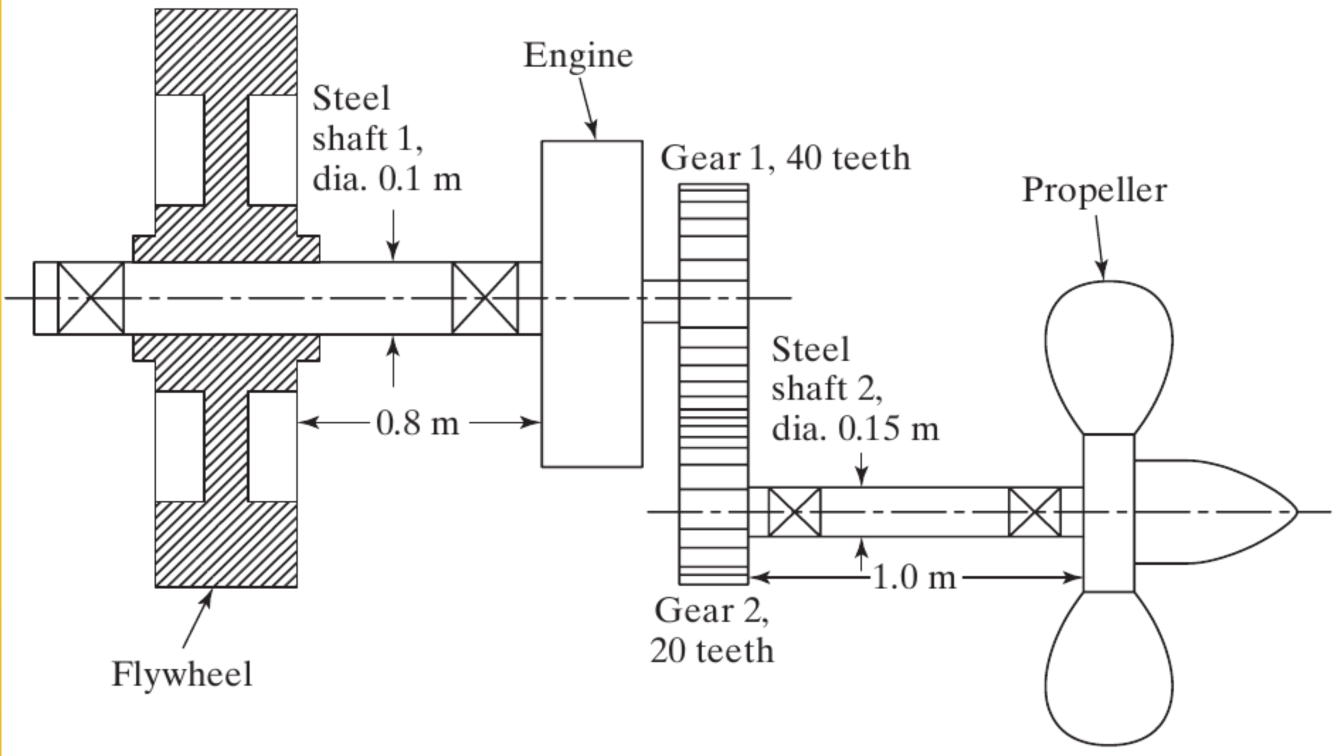
Sistema em Torção – Exemplo

Razões de amplitude:

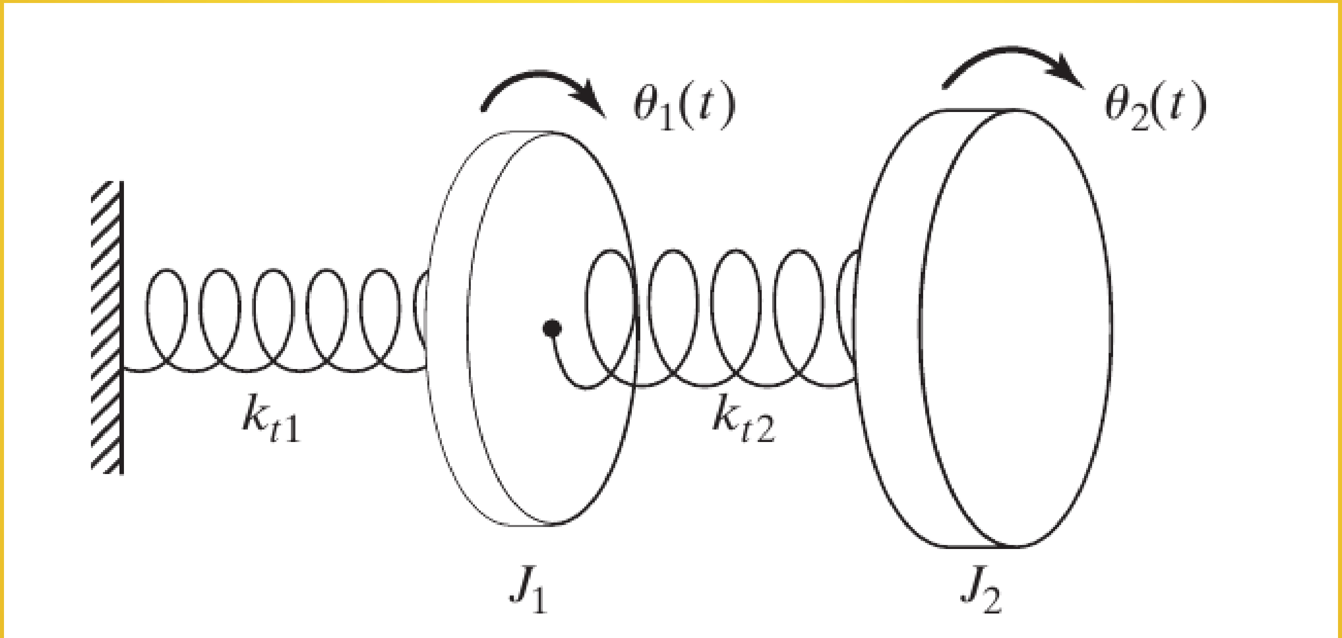
$$r_1 = \frac{\Theta_2^{(1)}}{\Theta_1^{(1)}} = 2 - \frac{(5 - \sqrt{17})}{4}$$

$$r_2 = \frac{\Theta_2^{(2)}}{\Theta_1^{(2)}} = 2 - \frac{(5 + \sqrt{17})}{4}$$

Sistema em Torção – Exemplo



Sistema em Torção – Exemplo



Sistema em Torção – Exemplo

- Dados
  - Volante tão grande que pode ser considerado estacionário;
  - Momentos de inércia (em kg-m^2) para volante, motor, eng. 1 e eng. 2: 9000, 1000, 250, 150 e 2000.
- Solução:
  - Encontrar o momento de inércia equivalente de todos os rotores em relação a um deles;
  - Considerar o sistema como tendo dois graus de liberdade;

Sistema em Torção – Exemplo

- A árvore 2 gira com o dobro de velocidade da árvore 1;
- Escolhendo o motor como referência;

$$(J_{G2})_{\text{eq}} = (2)^2(150) = 600\ \text{kg-m}^2$$

$$(J_P)_{\text{eq}} = (2)^2(2000) = 8000\ \text{kg-m}^2$$

Sistema em Torção – Exemplo

- A árvore entre o motor e a engrenagem é muito curta, pode ser considerada rígida:

$$J_1 = J_E + J_{G1} + (J_{G2})_{\text{eq}} = 1000 + 250 + 600 = 1850 \text{ kg-m}^2$$

Sistema em Torção – Exemplo

- As rigidezes das árvores são

$$k_{t1} = \frac{GI_{01}}{l_1} = \frac{G}{l_1}\left(\frac{\pi d_1^4}{32}\right) = \frac{(80 \times 10^9)(\pi)(0.10)^4}{(0.8)(32)} = 981{,}750.0 \text{ N-m/rad}$$

$$k_{t2} = \frac{GI_{02}}{l_2} = \frac{G}{l_2}\left(\frac{\pi d_2^4}{32}\right) = \frac{(80 \times 10^9)(\pi)(0.15)^4}{(1.0)(32)} = 3{,}976{,}087.5 \text{ N-m/rad}$$

Sistema em Torção – Exemplo

- Usando as respostas analíticas:

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{(k_{t1} + k_{t2})\, J_2 + k_{t2}\, J_1}{J_1\, J_2}\right\}$$

$$\pm \left[\left\{\frac{(k_{t1} + k_{t2})\, J_2 + k_{t2}\, J_1}{J_1\, J_2}\right\}^2 - 4\left\{\frac{(k_{t1} + k_{t2})\, k_{t2} - k_{t2}^2}{J_1\, J_2}\right\}\right]^{1/2}$$

Sistema em Torção – Exemplo

- Com os valores numéricos:

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = 1588.46 \pm [(1588.46)^2 - 26.3750 \times 10^4]^{1/2}$$
$$= 1588.46 \pm 1503.1483$$

$$\omega_1^2 = 85.3117 \quad \text{or} \quad \omega_1 = 9.2364 \text{ rad/sec}$$
$$\omega_2^2 = 3091.6083 \quad \text{or} \quad \omega_2 = 55.6022 \text{ rad/sec}$$

Sistema em Torção – Exemplo

- A mesma coisa para os modos normais

$$r_1 = \frac{-J_1\omega_1^2 + (k_{t1} + k_{t2})}{k_{t2}}$$

$$= \frac{-(1850)(85.3117) + (495.7837 \times 10^4)}{397.6087 \times 10^4} = 1.2072$$

$$\left\{\frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right\}^{(1)} = \left\{\frac{1}{r_1}\right\} = \frac{1}{1.2072}$$

Sistema em Torção – Exemplo

- Segundo modo

$$r_2 = \frac{-J_1\omega_2^2 + (k_{t1} + k_{t2})}{k_{t2}}$$

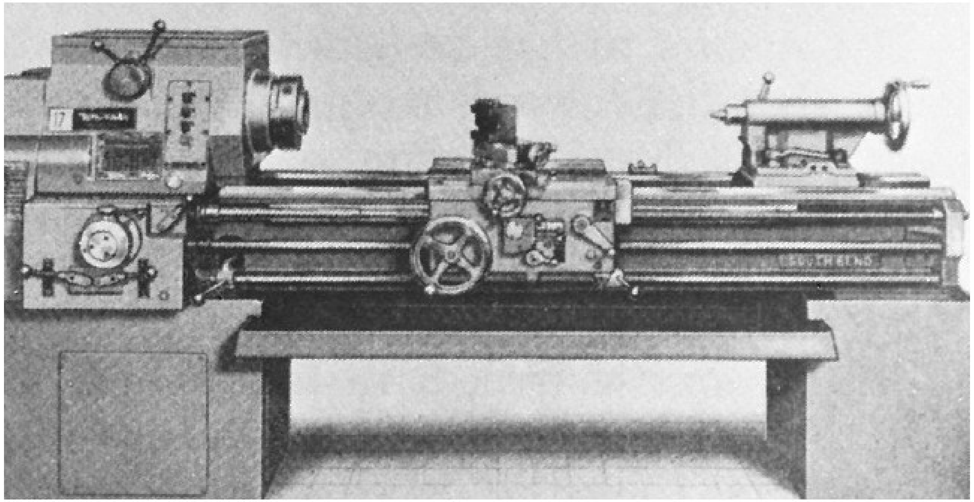
$$= \frac{-(1850)(3091.6083) + (495.7837 \times 10^4)}{397.6087 \times 10^4} = -0.1916$$

$$\begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{-0.1916}$$

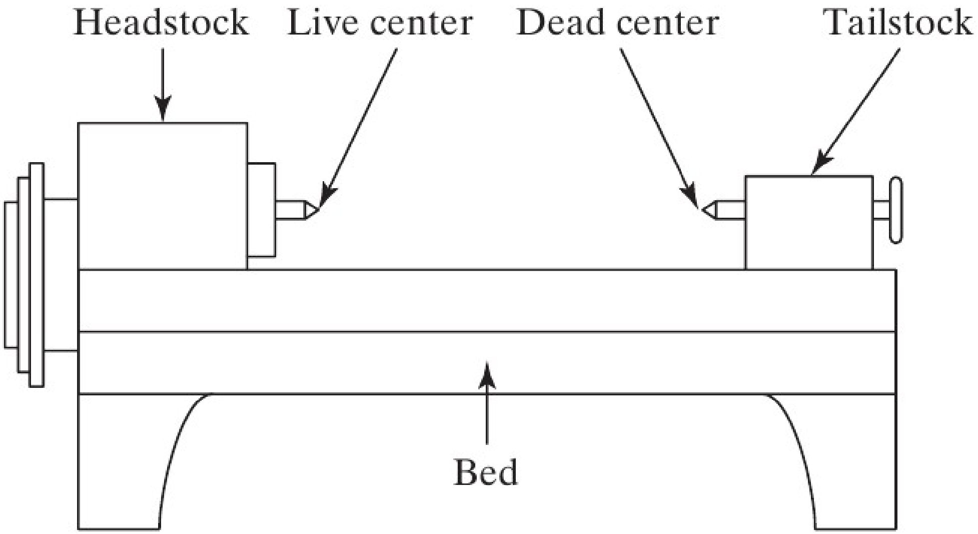
Coordenadas Principais

- Conjuntos alternativos de coordenadas generalizadas podem ser escolhidos para tornar a solução do problema mais conveniente;
- Em particular, existem sistemas de coordenadas nos quais as equações de movimento são desacopladas!

Coordenadas Principais – Exemplo

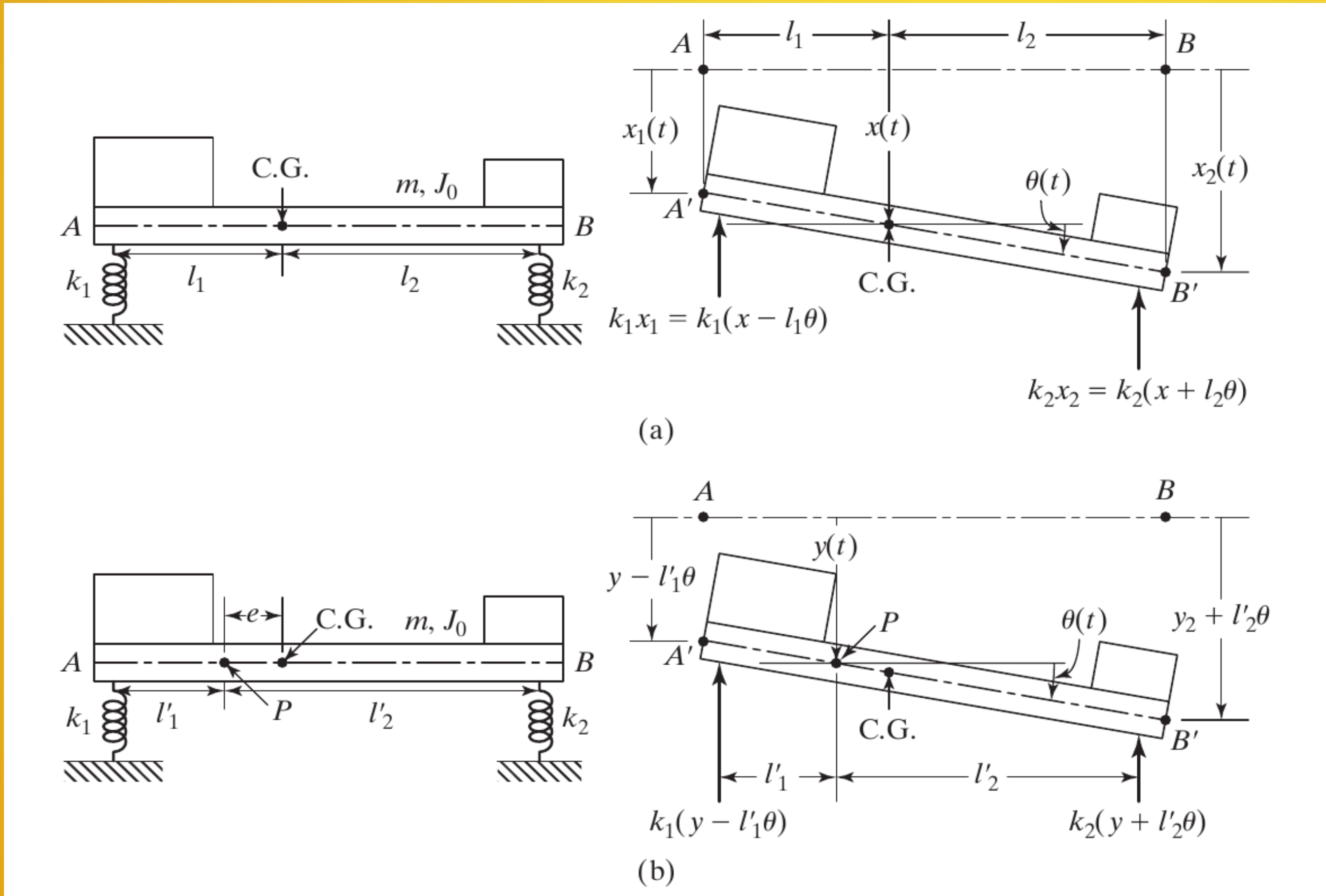


(a)



(b)

Coordenadas Principais – Exemplo



- $x_1(t)$ e $x_2(t)$
- $x(t)$ do CG e $\theta(t)$
- $x_1(t)$ e $\theta(t)$
- $y(t)$ (de P) e $\theta(t)$

Coordenadas Principais – Exemplo

Para $x(t)$ e $\theta(t)$

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta)$$

$$J_0\ddot{\theta} = k_1(x - l_1\theta)l_1 - k_2(x + l_2\theta)l_2$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -(k_1 l_1 - k_2 l_2) \\ -(k_1 l_1 - k_2 l_2) & (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Coordenadas Principais – Exemplo

- As equações são acopladas exceto quando o termo fora da diagonal é nulo!

$$k_1 l_1 - k_2 l_2 = 0$$
$$k_1 l_1 = k_2 l_2$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -(k_1 l_1 - k_2 l_2) \\ -(k_1 l_1 - k_2 l_2) & (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Coordenadas Principais – Exemplo

- Se houver acoplamento:
  - Uma força no CG causa rotação;
  - Um momento causa deslocamento vertical;
- Acoplamento *elástico* ou *estático*;

Coordenadas Principais – Exemplo

Para $y(t)$ e $\theta(t)$

$$m\ddot{y} = -k_1(y - l_1'\theta) - k_2(y + l_2'\theta) - me\ddot{\theta}$$

$$J_p\ddot{\theta} = k_1(y - l_1'\theta)l_1' - k_2(y + l_2'\theta)l_2' - me\ddot{y}$$

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2 l_2' - k_1 l_1') \\ (-k_1 l_1' + k_2 l_2') & (k_1 l_1'^2 + k_2 l_2'^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Coordenadas Principais – Exemplo

- As equações são acopladas mesmo quando o termo fora da diagonal da matriz de rigidez é nulo!
- Existe acoplamento *dinâmico* ou *de inércia*;
- Uma *aceleração* em um grau de liberdade provoca uma *força* (e movimento) no outro;

Coordenadas Principais – Exemplo

- No caso geral:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vibração Forçada

- Equações de movimento

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Vibração Forçada

Supondo forças harmônicas e **em fase**

$$F_j(t) = F_{j0}e^{i\omega t}, \qquad j = 1, 2$$

Supondo respostas harmônicas

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t}, \qquad j = 1, 2$$

As amplitudes da resposta são *complexas* e dependem dos parâmetros físicos e da frequência de excitação!

Vibração Forçada

Substituindo nas equações de movimento

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 m_{11} + i\omega c_{11} + k_{11}) & (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) \\ (-\omega^2 m_{12} + i\omega c_{12} + k_{12}) & (-\omega_2 m_{22} + i\omega c_{22} + k_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

Vibração Forçada

Para simplificar, definimos a impedância mecânica como

$$Z_{rs}(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}, \qquad r, s = 1, 2$$

E a equação de movimento pode ser reescrita como

$$[Z(i\omega)]\vec{X} = \vec{F}_0$$

Vibração Forçada

Com a *matriz de impedância*

$$[Z(i\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\omega) & Z_{12}(i\omega) \\ Z_{12}(i\omega) & Z_{22}(i\omega) \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \qquad \vec{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

Vibração Forçada

O sistema de equações de movimento

$$[Z(i\omega)]\vec{X} = \vec{F}_0$$

é um sistema de equações 2x2, algébrico, em variáveis complexas!

A solução do sistema é

$$\vec{X} = [Z(i\omega)]^{-1}\vec{F}_0$$

Vibração Forçada

A inversa da matriz de impedância mecânica é

$$[Z(i\omega)]^{-1} = \frac{1}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)}\begin{bmatrix} Z_{22}(i\omega) & -Z_{12}(i\omega) \\ -Z_{12}(i\omega) & Z_{11}(i\omega) \end{bmatrix}$$

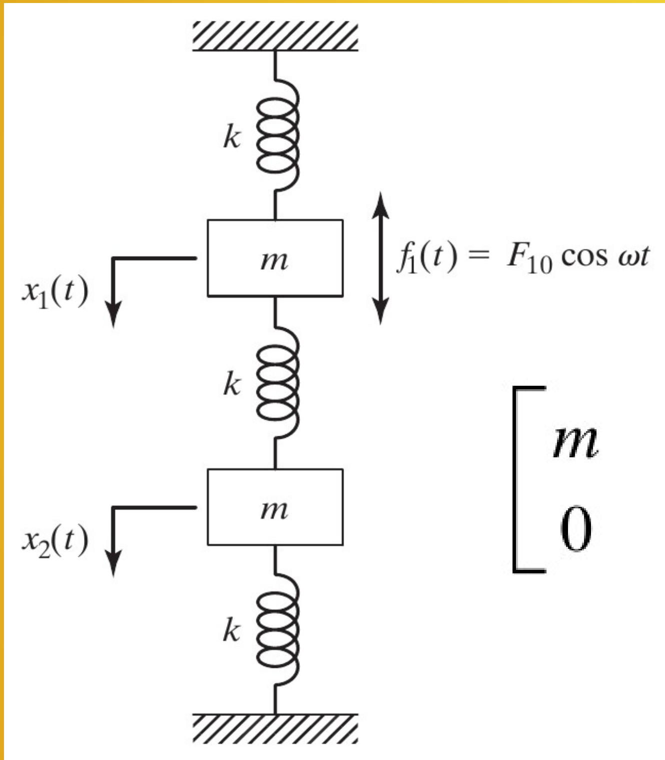
Vibração Forçada

As amplitudes (complexas) são dadas então por

$$X_1(i\omega) = \frac{Z_{22}(i\omega)F_{10} - Z_{12}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)}$$

$$X_2(i\omega) = \frac{-Z_{12}(i\omega)F_{10} + Z_{11}(i\omega)F_{20}}{Z_{11}(i\omega)Z_{22}(i\omega) - Z_{12}^2(i\omega)}$$

Vibração Forçada – Exemplo



Equações de Movimento

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \cos \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vibração Forçada – Exemplo

Temos

$$m_{11} = m_{22} = m, \qquad m_{12} = 0, \qquad c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0,$$
$$k_{11} = k_{22} = 2k, \qquad k_{12} = -k, \qquad F_1 = F_{10} \cos \omega t, \qquad F_2 = 0$$

Como o sistema não é amortecido, não há mudança de fase e as amplitudes podem ser consideradas reais.
A solução pode ser tomada como:

$$x_j(t) = X_j \cos \omega t, \qquad j = 1, 2$$

Vibração Forçada – Exemplo

As impedâncias mecânicas (reais) são:

$$Z_{11}(\omega) = Z_{22}(\omega) = -m\omega^2 + 2k, \qquad Z_{12}(\omega) = -k$$

Vibração Forçada – Exemplo

As amplitudes são:

$$X_1(\omega) = \frac{(-\omega^2 m + 2k)F_{10}}{(-\omega^2 m + 2k)^2 - k^2} = \frac{(-\omega^2 m + 2k)F_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)}$$

$$X_2(\omega) = \frac{kF_{10}}{(-m\omega^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{kF_{10}}{(-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k)}$$

Vibração Forçada – Exemplo

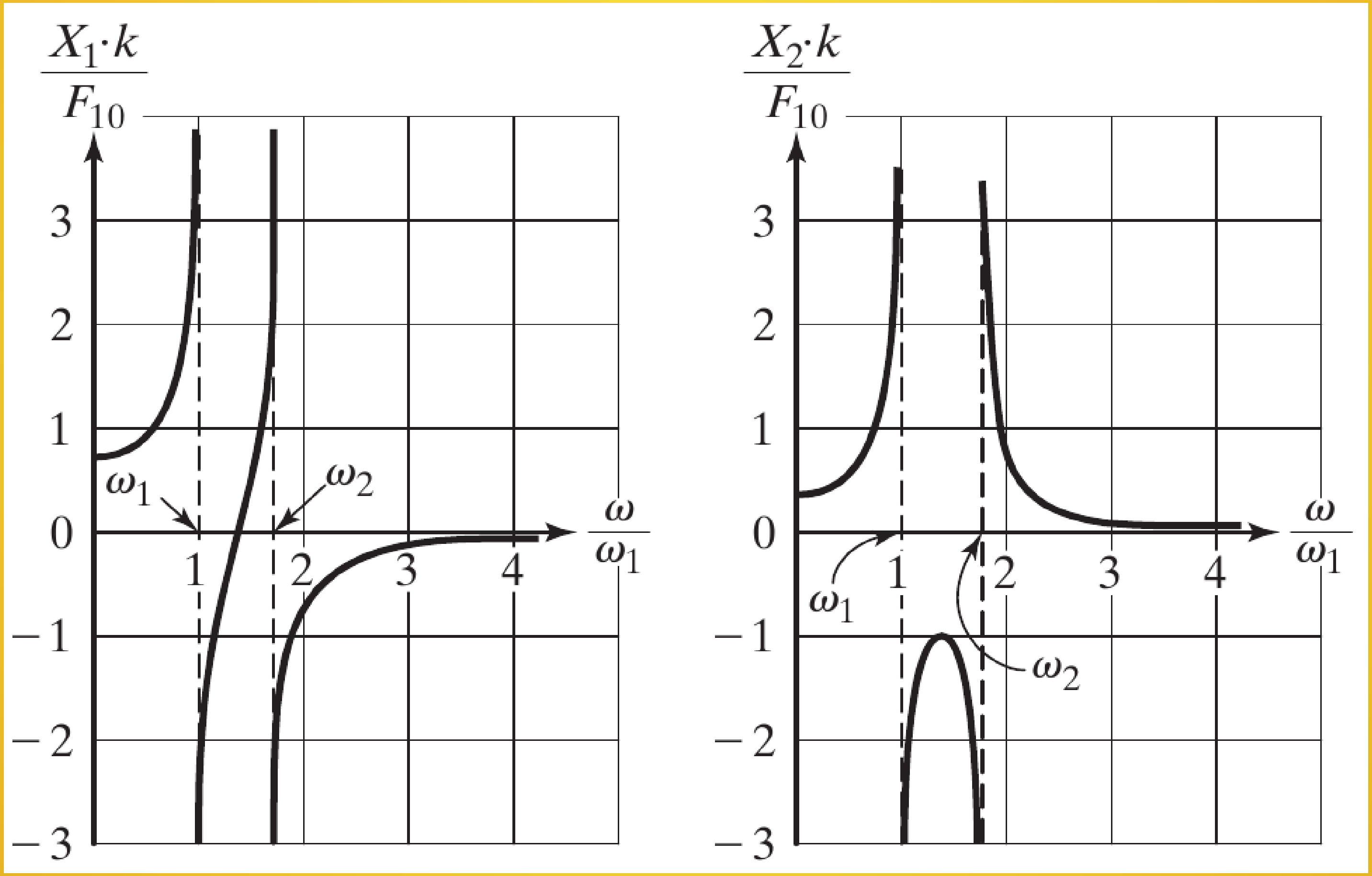
Definindo

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{3k}{m}$$

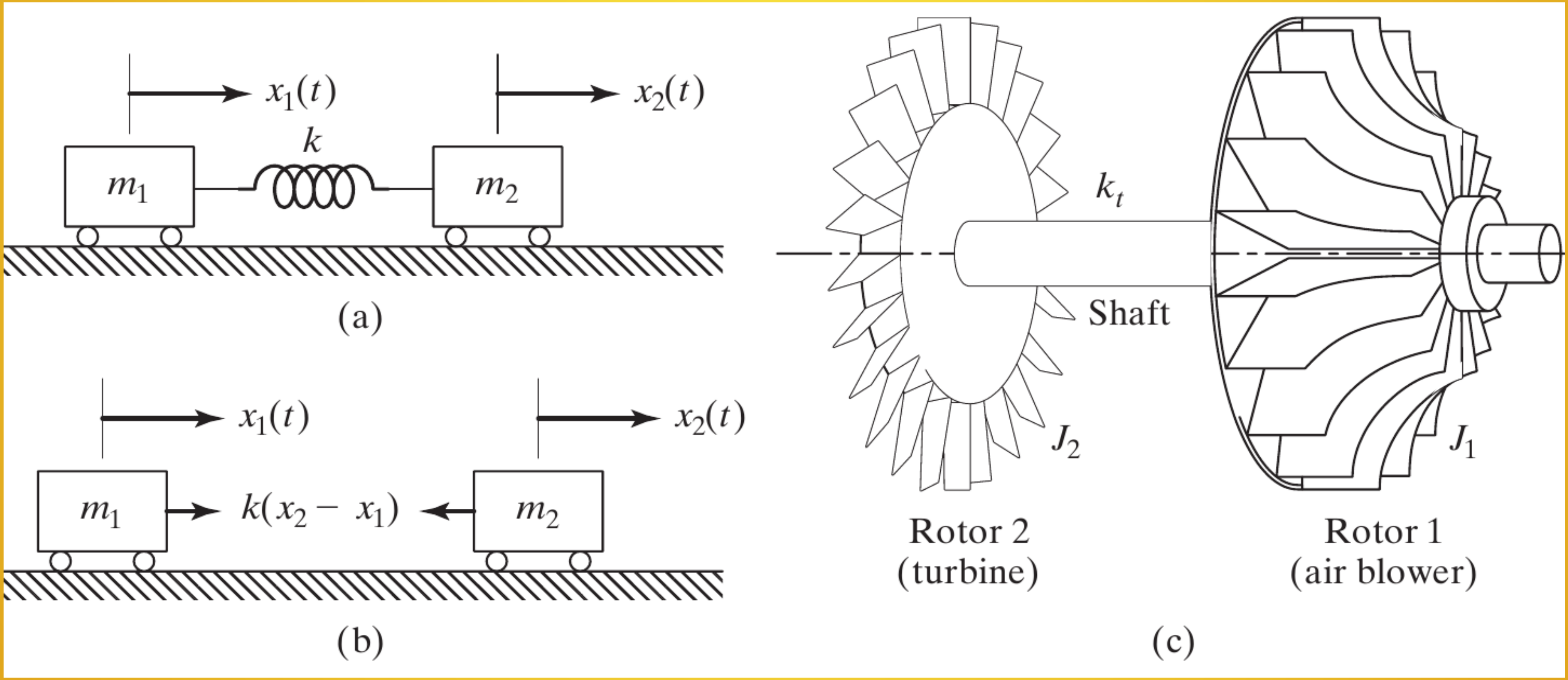
$$X_1(\omega) = \frac{\left\{2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right\} F_{10}}{k\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]}$$

$$X_2(\omega) = \frac{F_{10}}{k\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]}$$

Vibração Forçada – Exemplo



Sistemas Semidefinidos



Vibração Forçada – Exemplo

Equações de movimento

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

Solução

$$x_j(t) = X_j \cos(\omega t + \phi_j), \qquad j = 1, 2$$

Vibração Forçada – Exemplo

Substituindo

$$(-m_1\omega^2 + k)X_1 - kX_2 = 0$$

$$-kX_1 + (-m_2\omega^2 + k)X_2 = 0$$

Equação característica

$$\omega^2[m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)] = 0$$

Vibração Forçada – Exemplo

Frequências Naturais

$$\omega_1 = 0 \qquad \text{and} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$