Vibrações Mecânicas

Vibração Forçada – Sistemas com 1 GL
Excitação Geral

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2015.1

Introdução

A excitação pode ser:

- Periódica não harmônica: Série de Fourier
- Não periódica:
  - Transformada de Fourier;
  - Integral de Convolução;
  - Transformada de Laplace;
  - Métodos Numéricos

Métodos computacionais são mais poderosos, porém resolvem o problema para um conjunto específico de parâmetros.

Expansão da Força em Série de Fourier

Supondo $F(t)$ periódica com período $\tau = 2\pi/\omega$,

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t$$

onde

$$a_j = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\cos j\omega t\,dt, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$b_j = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\sin j\omega t\,dt, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

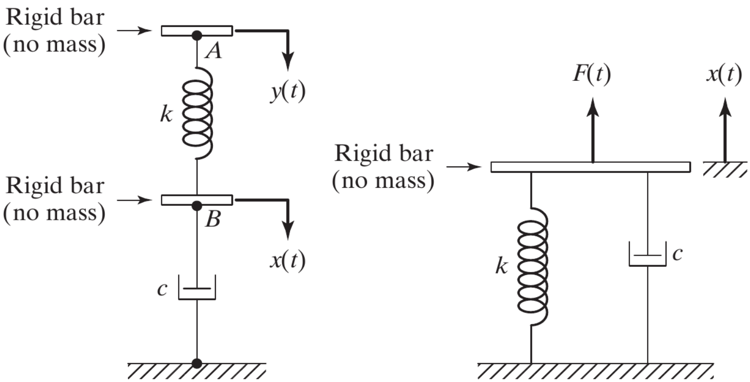
Sistemas de Primeira Ordem

Em vibração forçada, o comportamento de sistemas de primeira ordem é interessante também.

- Variável e sua derivada apenas;
- Posição e velocidade;
- Velocidade e aceleração;

Como a excitação é periódica, pode haver vibração permanente, mesmo que não haja transferência de energia armazenada entre potencial e cinética!

Exemplo



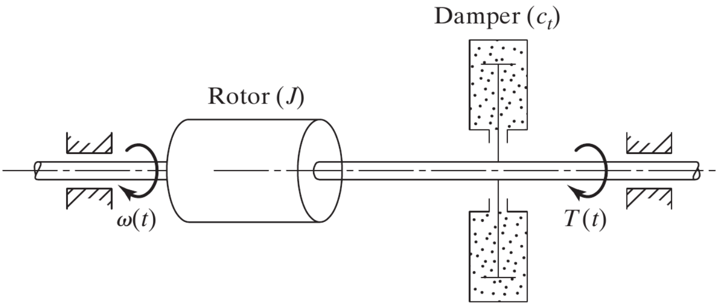
$c\dot{x} + kx = ky(t)$

(a)

$c\dot{x} + kx = f(t)$

(b)

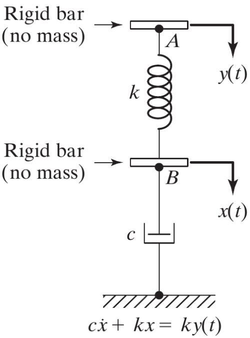
Exemplo



$$J\dot{\omega} + c_t\omega = T(t)$$

(c)

Exemplo



Considerando que este sistema seja acionado pelo movimento da extremidade, $y(t)$, a eq. de movimento é

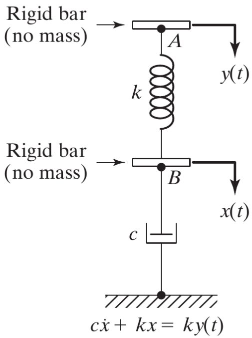
$$c\dot{x} + k(x - y) = 0.$$

Podemos rescrever a equação como

$$\dot{x} + ax = ay,$$

com $a = \frac{k}{c}$.

Exemplo



Considerando que este sistema seja acionado pelo movimento da extremidade, $y(t)$, a eq. de movimento é

$$c\dot{x} + k(x - y) = 0.$$

Podemos rescrever a equação como

$$\dot{x} + ax = ay,$$

com $a = \frac{k}{c}$.

Exemplo

Supondo que $y(t)$ seja periódico e expandido em Série de Fourier,

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t$$

com a_j e b_j como calculados anteriormente, multiplicamos tudo por a e escrevemos

$$ay(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \omega_j t + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin \omega_j t$$

com

$$A_0 = \frac{aa_0}{2}, \quad A_j = aa_j, \quad B_j = ab_j, \quad \omega_j = j\omega,$$

e $j = 1, 2, \ldots$.

Solução

A equação a ser resolvida é então

$$\dot{x} + ax = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \omega_j t + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin \omega_j t$$

com

$$A_0 = \frac{aa_0}{2}, \quad A_j = aa_j, \quad B_j = ab_j, \quad \omega_j = j\omega,$$

e $j = 1, 2, \ldots$.

Claramente a "força" é a soma de uma componente constante com uma combinação linear de funções harmônicas.
O problema é linear, portanto vale o Princípio da Superposição!

Solução

A equação a ser resolvida é então

$$\dot{x} + ax = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \omega_j t + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin \omega_j t$$

com

$$A_0 = \frac{aa_0}{2}, \quad A_j = aa_j, \quad B_j = ab_j, \quad \omega_j = j\omega,$$

e $j = 1, 2, \ldots$.

Claramente a “força” é a soma de uma componente constante com uma combinação linear de funções harmônicas.
O problema é linear, portanto vale o Princípio da Superposição!

Parcela Constante

A parcela da solução que corresponde ao termo constante é

$$\dot{x}_0 + a x_0 = A_0$$

Obs: x_0 é, em princípio, uma *variável*, $x_0(t)$.

No caso, por inspeção, a solução desta EDO é

$$x_0(t) = \frac{A_0}{a},$$

que é de fato uma constante.

Parcela Constante

A parcela da solução que corresponde ao termo constante é

$$\dot{x}_0 + a x_0 = A_0$$

Obs: x_0 é, em princípio, uma *variável*, $x_0(t)$.

No caso, por inspeção, a solução desta EDO é

$$x_0(t) = \frac{A_0}{a},$$

que é de fato uma constante.

Termos em Cosseno

Para os termos $A_j \cos \omega_j t$, as equações são

$$\dot{x}_j + a x_j = A_j \cos \omega_j t$$

Vamos supor que a solução seja da forma

$$x_j(t) = X_j \cos(\omega_j t - \phi_j)$$

com X_j e ϕ_j constantes a determinar para cada termo!

Por conveniência, vamos reescrever na forma complexa,

$$x_j(t) = \mathrm{Re}\left[X_j e^{i(\omega_j t - \phi_j)}\right] = X_j e^{i\omega_j t} e^{-i\phi_j} = U_j e^{i\omega_j t}$$

onde

$$U_j = X_j e^{-i\phi_j}$$

é um número complexo!

Termos em Cosseno

Para os termos $A_j \cos \omega_j t$, as equações são

$$\dot{x}_j + a x_j = A_j \cos \omega_j t$$

Vamos supor que a solução seja da forma

$$x_j(t) = X_j \cos(\omega_j t - \phi_j)$$

com X_j e ϕ_j constantes a determinar para cada termo!

Por conveniência, vamos reescrever na forma complexa,

$$x_j(t) = \mathrm{Re}\left[X_j e^{i(\omega_j t - \phi_j)}\right] = X_j e^{i\omega_j t} e^{-i\phi_j} = U_j e^{i\omega_j t}$$

onde

$$U_j = X_j e^{-i\phi_j}$$

é um número complexo!

Termos em Cosseno

Para os termos $A_j \cos \omega_j t$, as equações são

$$\dot{x}_j + a x_j = A_j \cos \omega_j t$$

Vamos supor que a solução seja da forma

$$x_j(t) = X_j \cos(\omega_j t - \phi_j)$$

com X_j e ϕ_j constantes a determinar para cada termo!

Por conveniência, vamos reescrever na forma complexa,

$$x_j(t) = \mathrm{Re}\left[X_j e^{i(\omega_j t - \phi_j)}\right] = X_j e^{i\omega_j t} e^{-i\phi_j} = U_j e^{i\omega_j t}$$

onde

$$U_j = X_j e^{-i\phi_j}$$

é um número complexo!

Termos em Cosseno

Como

$$x_j(t) = U_j e^{i\omega_j t},$$

a velocidade é

$$\dot{x}_j(t) = i\omega_j U_j e^{i\omega_j t}.$$

Lembrando que vamos usar apenas a parte real, podemos introduzir o termo forçante na forma complexa,

$$A_j \cos \omega_j t = A_j e^{i\omega_j t}$$

A equação de movimento fica então

$$i\omega_j U_j e^{i\omega_j t} + aU_j e^{i\omega_j t} = A_j e^{i\omega_j t}$$

como $e^{i\omega_j t} \neq 0$,

Termos em Cosseno

Como

$$x_j(t) = U_j e^{i\omega_j t},$$

a velocidade é

$$\dot{x}_j(t) = i\omega_j U_j e^{i\omega_j t}.$$

Lembrando que vamos usar apenas a parte real, podemos introduzir o termo forçante na forma complexa,

$$A_j \cos \omega_j t = A_j e^{i\omega_j t}$$

A equação de movimento fica então

$$i\omega_j U_j e^{i\omega_j t} + aU_j e^{i\omega_j t} = A_j e^{i\omega_j t}$$

como $e^{i\omega_j t} \neq 0$,

Termos em Cosseno

Como

$$x_j(t) = U_j e^{i\omega_j t},$$

a velocidade é

$$\dot{x}_j(t) = i\omega_j U_j e^{i\omega_j t}.$$

Lembrando que vamos usar apenas a parte real, podemos introduzir o termo forçante na forma complexa,

$$A_j \cos \omega_j t = A_j e^{i\omega_j t}$$

A equação de movimento fica então

$$i\omega_j U_j e^{i\omega_j t} + aU_j e^{i\omega_j t} = A_j e^{i\omega_j t}$$

como $e^{i\omega_j t} \neq 0$,

Termos em Cosseno

(...) a equação torna-se

$$i\omega_j U_j + aU_j = A_j$$

ou

$$U_j = \frac{A_j}{a + i\omega_j}.$$

A amplitude de movimento pode então ser calculada por

$$U_j = X_j e^{-i\phi_j} = \frac{A_j}{a + i\omega_j}.$$

Vamos expressar o termo à esquerda na forma complexa exponencial para poder simplificar a expressão.

Termos em Cosseno

(. . .) a equação torna-se

$$i\omega_j U_j + aU_j = A_j$$

ou

$$U_j = \frac{A_j}{a + i\omega_j}.$$

A amplitude de movimento pode então ser calculada por

$$U_j = X_j e^{-i\phi_j} = \frac{A_j}{a + i\omega_j}.$$

Vamos expressar o termo à esquerda na forma complexa exponencial para poder simplificar a expressão.

Termos em Cosseno

Obviamente,

$$\frac{1}{a+i\omega_j} = \frac{i}{a+i\omega_j}\frac{a-i\omega_j}{a-i\omega_j} = \frac{a-i\omega_j}{a^2+\omega_j^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}} - i\frac{\omega_j}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}}\right]$$

Claramente, apesar do tamanho, isto é um número complexo que pode ser escrito

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}}[\cos\phi_j - i\sin\phi_j] = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}}e^{-i\phi_j},$$

com $\phi_j = \arctan(\omega_j/a)$.

Termos em Cosseno

Obviamente,

$$\frac{1}{a+i\omega_j} = \frac{i}{a+i\omega_j}\frac{a-i\omega_j}{a-i\omega_j} = \frac{a-i\omega_j}{a^2+\omega_j^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}} - i\frac{\omega_j}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}}\right]$$

Claramente, apesar do tamanho, isto é um número complexo que pode ser escrito

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}}[\cos\phi_j - i\sin\phi_j] = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}}e^{-i\phi_j},$$

com $\phi_j = \arctan(\omega_j/a)$.

Termos em Cosseno

Assim,

$$X_j e^{-i\phi_j} = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} e^{-i\phi_j},$$

e é claro,

$$X_j = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}.$$

A solução para qualquer termo forçante em cosseno é então

$$x_j(t) = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \cos(\omega_j t - \phi_j),$$

com

$$\phi_j = \arctan \frac{\omega_j}{a}.$$

Termos em Cosseno

Assim,

$$X_j e^{-i\phi_j} = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} e^{-i\phi_j},$$

e é claro,

$$X_j = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}.$$

A solução para qualquer termo forçante em cosseno é então

$$x_j(t) = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \cos(\omega_j t - \phi_j),$$

com

$$\phi_j = \arctan \frac{\omega_j}{a}.$$

Termos em Seno

Procedemos de forma completamente análoga, e as soluções são

$$x_j(t) = \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \sin(\omega_j t - \phi_j),$$

com

$$\phi_j = \arctan \frac{\omega_j}{a}.$$

Solução Particular

A solução particular é a soma de todos estes termos

$$
\begin{aligned}
x_p(t) = {} & \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \cos(\omega_j t - \phi_j) \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \sin(\omega_j t - \phi_j).
\end{aligned}
$$

Para obtermos a solução geral ainda falta adicionar a *solução homogênea*!

Solução Particular

A solução particular é a soma de todos estes termos

$$x_p(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \cos(\omega_j t - \phi_j)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \sin(\omega_j t - \phi_j).$$

Para obtermos a solução geral ainda falta adicionar a *solução homogênea*!

Solução Geral

A solução homegênea é, por inspeção

$$x_h(t) = Ce^{-at}$$

A solução geral é, finalmente,

$$x(t) = Ce^{-at} + \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \cos(\omega_j t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \sin(\omega_j t - \phi_j),$$

com A_0, X_j, Y_j e ϕ_j como definidos previamente.

Solução Geral

A solução homegênea é, por inspeção

$$x_h(t) = Ce^{-at}$$

A solução geral é, finalmente,

$$x(t) = Ce^{-at} + \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \cos(\omega_j t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \sin(\omega_j t - \phi_j),$$

com A_0, X_j, Y_j e ϕ_j como definidos previamente.

Condições Iniciais

Aplicando a condição inicial $x(0) = x_0$,

$$x_0 = C + \frac{A_0}{a} - \sum_{j=1}^{\infty} X_j \sin\phi_j + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cos\phi_j,$$

o que leva a

$$C = x_0 - \frac{A_0}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \sin\phi_j - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cos\phi_j.$$

Forma Final

A forma final da solução é então,

$$x(t) = \left[x_0 - \frac{A_0}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \sin \phi_j - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cos \phi_j \right] e^{-at}$$
$$+ \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \cos(\omega_j t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \sin(\omega_j t - \phi_j).$$

Sistemas de Segunda Ordem

. Se a força $f(t)$ na equação de movimento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t)$$

é periódica, então expandimos a força em sua série de Fourier,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t,$$

e temos as três "famílias" de equações para resolver,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = \frac{a_0}{2},$$

e, para $j = 1, \ldots, \infty$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_j \cos j\omega t, \qquad \text{e} \qquad m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = b_j \sin j\omega t.$$

Soluções Particulares

A solução particular de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_0/2$ é

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2\kappa}$$

Claramente, as soluções de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_j \cos j\omega t$ são

$$x_p(t) = \frac{a_j/\kappa}{\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j),$$

e para $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = b_j \sin j\omega t$, temos

$$x_p(t) = \frac{b_j/\kappa}{\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j),$$

com $r = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ e $\phi_j = \arctan\left(\dfrac{2\zeta jr}{1 - j^2 r^2}\right)$.

Soluções Particulares

A solução particular de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_0/2$ é

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2\kappa}$$

Claramente, as soluções de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_j \cos j\omega t$ são

$$x_p(t) = \frac{a_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j),$$

e para $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = b_j \sin j\omega t$, temos

$$x_p(t) = \frac{b_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j),$$

com $r = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ e $\phi_j = \arctan\left(\dfrac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right)$.

Soluções Particulares

A solução particular de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_0/2$ é

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2\kappa}$$

Claramente, as soluções de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_j \cos j\omega t$ são

$$x_p(t) = \frac{a_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j),$$

e para $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = b_j \sin j\omega t$, temos

$$x_p(t) = \frac{b_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j),$$

com $r = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ e $\phi_j = \arctan\left(\dfrac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right)$.

Solução completa

A solução particular completa é então

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2\kappa} + \frac{a_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) +$$

$$x_p(t) = \frac{b_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j),$$

com

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \qquad \text{e} \qquad \arctan\left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right).$$

Observações

- No regime permanente, $x(t) = x_p(t)$;
- Amplitude e fase dependem do harmônico j;
- Pode haver ressonância com qualquer harmônico;
- Amplitudes tendem a diminuir quand j cresce;
- Normalmente poucos primeiros harmônicos são suficientes;
- Calcular a solução transiente é possível, mas não trivial!
- Não vamos calcular séries de Fourier, vamos usar tabelas ou sistemas de matemática computacional;

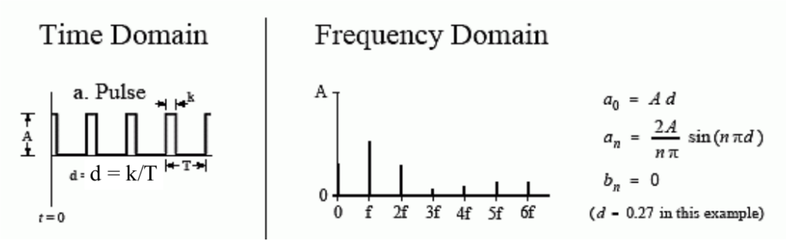
Séries de Fourier

Table of Fourier Series

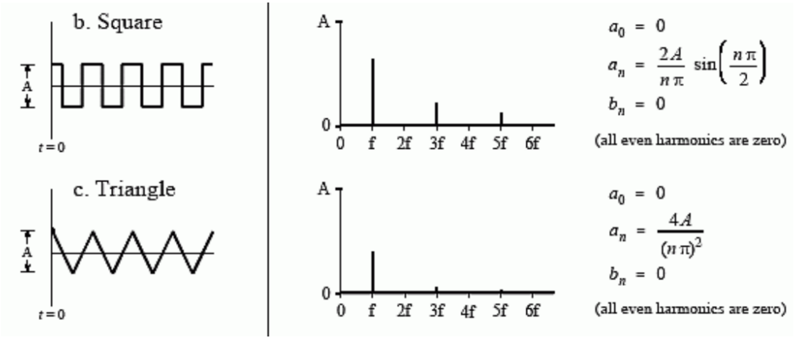
The table below assumes a Fourier series representation of the form

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right] \qquad \text{where } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

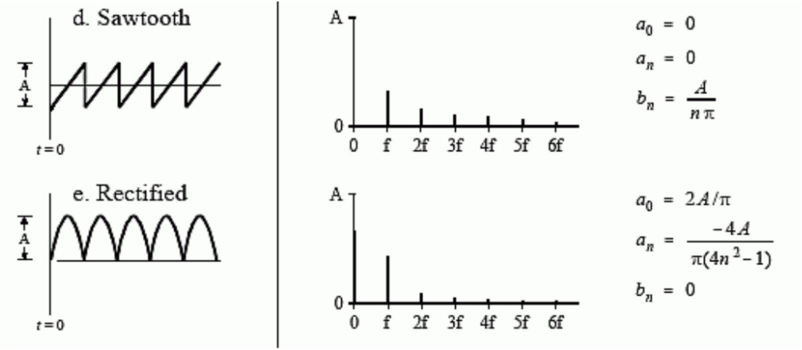
The signal must be periodic with a period T



Séries de Fourier

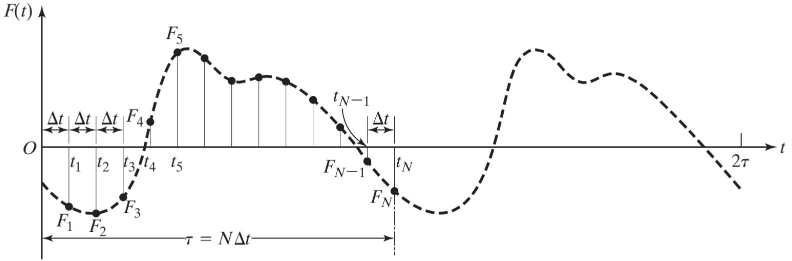


Séries de Fourier



Integração Numérica

Uma força pode ser periódica, mas não ter série de Fourier analítica. Por exemplo, a força pode ser medida experimentalmente, através de uma amostragem a tempos regulares de um sinal.



É possível calcular a Série de Fourier numericamente, integrando os coeficientes da série de Fourier. Em geral, isto não é uma boa ideia.

Regra do Trapézio

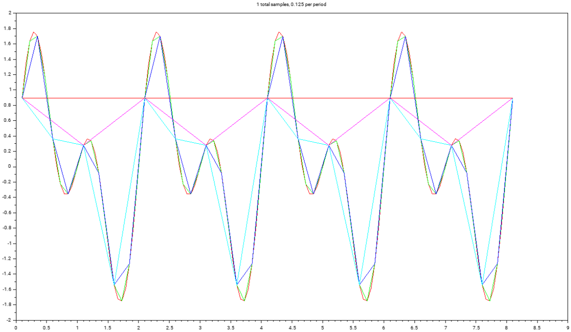
Empregando a regra do trapézio, os coeficientes de Fourier são dados por:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} F_i, \\
a_j &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} F_i \cos \frac{2j\pi t_i}{\tau}, \qquad j = 1, 2, \ldots, \\
b_j &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} F_i \sin \frac{2j\pi t_i}{\tau}, \qquad j = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
$$

onde τ é o período, $\Delta t = \tau / N$ e $t_i = i\Delta t$.

Problemas

- O procedimento anterior é extremamente ineficiente computacionalmente;
- É preciso cuidado para que o procedimento não falhe catastroficamente: Teorema de Nyquist



Forças não periódicas

Para forças não periódicas, temos várias alternativas.

- Transformada de Fourier;
- Integral de Convolução;
- Transformada de Laplace;
- Integração numérica direta;

Nenhuma é muito agradável de fazer “na mão”...

Impulso

É importante relembrar o conceito de Impulso.

- Forças não periódicas geralmente tem duração finita;
- Impactos, explosões, terremotos, etc.;
- Normalmente, uma força de grande intensidade, que age por um curto período;
- O efeito de um impulso mecânica é alterar a quantidade de movimento de uma partícula;

Da mecânica, sabemos que o impulso total é igual à variação da quantidade de movimento da partícula.

Impulso Unitário

Temos então que

$$\mathbf{F} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\, dt = m\dot{x}(t_2) - m\dot{x}(t_1).$$

Definimos um impulso unitário como um impulso de magnitude 1 que age, no tempo zero, por um tempo infinitesimalmente curto:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta \to 0} \int_{t}^{t+\Delta t} F(t)\, dt = F(t)dt = 1.$$

Impulso Unitário

Temos então que

$$\mathbf{F} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\, dt = m\dot{x}(t_2) - m\dot{x}(t_1).$$

Definimos um impulso unitário como um impulso de magnitude 1 que age, no tempo zero, por um tempo infinitesimalmente curto:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta \to 0} \int_{t}^{t+\Delta t} F(t)\, dt = F(t)dt = 1.$$

Função Delta de Dirac

A função Delta de Dirac é definida por

$$\delta(t-\tau) = 0, \qquad \text{para } t \neq \tau;$$
$$\int_0^{-\infty} \delta(t-\tau)\,dt = 1;$$
$$\int_0^{-\infty} \delta(t-\tau)F(t)\,dt = F(\tau);$$

para $0 < \tau < \infty$.

Impulso e Função Delta

Claramente, um impulso unitário agindo no tempo 0 pode ser descrito por

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}\delta(t) = \delta(t).$$

Um impulso arbitrário tem magnitude $\mathbf{F}$, e pode ser descrito por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\delta(t).$$

Impulso e Função Delta

Claramente, um impulso unitário agindo no tempo 0 pode ser descrito por

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}\delta(t) = \delta(t).$$

Um impulso arbitrário tem magnitude $\mathbf{F}$, e pode ser descrito por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\delta(t).$$

Resposta ao Impulso Unitário

Para um oscilador harmônico com 1GL, a equação de movimento é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Se $f(t) = \delta(t)$, então a força aplicada é nula para qualquer $t > 0$!
Isto implica que o sistema está em vibração livre para qualquer $t > 0$!
Neste caso, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0,$$

cuja solução é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right].$$

Sujeita a condições iniciais adequadas.

Resposta ao Impulso Unitário

Para um oscilador harmônico com 1GL, a equação de movimento é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Se $f(t) = \delta(t)$, então a força aplicada é nula para qualquer $t > 0$!

Isto implica que o sistema está em vibração livre para qualquer $t > 0$!

Neste caso, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0,$$

cuja solução é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin\omega_d t\right].$$

Sujeita a condições iniciais adequadas.

Resposta ao Impulso Unitário

Para um oscilador harmônico com 1GL, a equação de movimento é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Se $f(t) = \delta(t)$, então a força aplicada é nula para qualquer $t > 0$! Isto implica que o sistema está em vibração livre para qualquer $t > 0$!

Neste caso, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0,$$

cuja solução é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right].$$

Sujeita a condições iniciais adequadas.

Resposta ao Impulso Unitário

Para um oscilador harmônico com 1GL, a equação de movimento é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Se $f(t) = \delta(t)$, então a força aplicada é nula para qualquer $t > 0$! Isto implica que o sistema está em vibração livre para qualquer $t > 0$!

Neste caso, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0,$$

cuja solução é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin\omega_d t\right].$$

Sujeita a condições iniciais adequadas.

Resposta ao Impulso Unitário

Claramente, $x(0) = 0$, mas a massa tem velocidade inicial não nula devido ao impulso.
No caso,

$$\mathbf{f} = 1 = m\dot{x}(t = 0) - m\dot{x}(t = 0^-) = m\dot{x}_0.$$

As condições iniciais são então

$$x(t = 0) = x_0 = 0,$$
$$\dot{x}_0(t = 0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m}.$$

Introduzindo as condições iniciais na resposta, temos

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t.$$

Resposta ao Impulso Unitário

Claramente, $x(0) = 0$, mas a massa tem velocidade inicial não nula devido ao impulso.
No caso,

$$\mathbf{f} = 1 = m\dot{x}(t = 0) - m\dot{x}(t = 0^-) = m\dot{x}_0.$$

As condições iniciais são então

$$x(t = 0) = x_0 = 0,$$
$$\dot{x}_0(t = 0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m}.$$

Introduzindo as condições iniciais na resposta, temos

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t.$$

Resposta ao Impulso Unitário

Claramente, $x(0) = 0$, mas a massa tem velocidade inicial não nula devido ao impulso.
No caso,

$$\mathbf{f} = 1 = m\dot{x}(t = 0) - m\dot{x}(t = 0^-) = m\dot{x}_0.$$

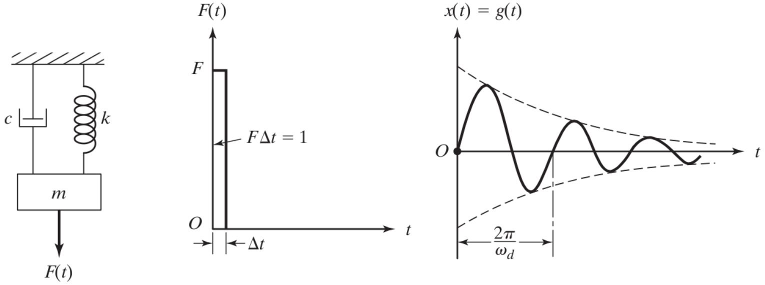
As condições iniciais são então

$$x(t = 0) = x_0 = 0,$$
$$\dot{x}_0(t = 0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m}.$$

Introduzindo as condições iniciais na resposta, temos

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t.$$

Resposta ao Impulso Unitário



Resposta a Impulso de Magnitude Arbitrária

Se a magnitude do impulso é $\mathbf{F}$, a velocidade inicial é

$$\mathbf{F} = m\dot{x}(t=0) - m\dot{x}(t=0^{-}) = m\dot{x}_0$$

ou

$$\dot{x}_0 = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Como tudo é linear, a resposta é

$$x(t) = \frac{\mathbf{F}e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t = \mathbf{F}g(t).$$

Resposta a Impulso de Magnitude Arbitrária

Se a magnitude do impulso é $\mathbf{F}$, a velocidade inicial é

$$\mathbf{F} = m\dot{x}(t=0) - m\dot{x}(t=0^-) = m\dot{x}_0$$

ou

$$\dot{x}_0 = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

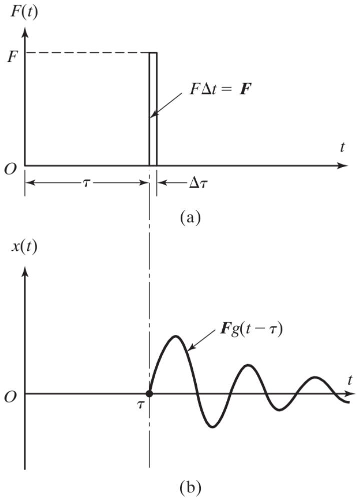
Como tudo é linear, a resposta é

$$x(t) = \frac{\mathbf{F}e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t = \mathbf{F}g(t).$$

Resposta a Impulso em Tempo arbitrário

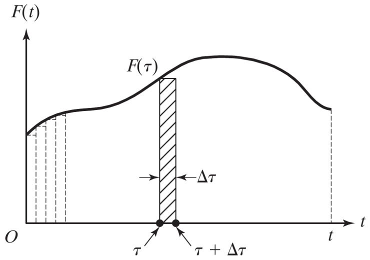
Se o impulso é aplicado em um tempo arbitrário $t = \tau$, a velocidade varia de $\mathbf{F}/m$ neste instante.
A solução então é idêntica à solução para o impulso arbitrário no tempo 0, deslocada para o tempo τ.
Temos então que

$$x(t) = \mathbf{F}g(t - \tau).$$



Resposta a Força Geral

Consideramos uma força arbitrária como uma sequência de impulsos.
A resposta em um tempo t é a soma das resposta de todos os impulsos que aconteceram até aquele instante.



A magnitude do impulso no tempo τ é

$$\mathbf{F}(\tau) = F(\tau)\Delta\tau.$$

O efeito no tempo t do impulso no tempo τ é

$$\Delta x(t) = \mathbf{F}(\tau)g(t-\tau),$$

Integral de Convolução ou Duhamel

A resposta total é a soma dos efeitos de todos os impulsos anteriores ao tempo t,

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \mathbf{F}(\tau) g(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^{t} F(\tau) g(t-\tau) \Delta\tau.$$

Tomando o limite quando $\Delta\tau \to 0$,

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

Substituindo o valor da resposta ao impulso unitário,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau)\, d\tau.$$

Integral de Convolução ou Duhamel

A resposta total é a soma dos efeitos de todos os impulsos anteriores ao tempo t,

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \mathbf{F}(\tau) g(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^{t} F(\tau) g(t-\tau) \Delta\tau.$$

Tomando o limite quando $\Delta\tau \to 0$,

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

Substituindo o valor da resposta ao impulso unitário,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau)\, d\tau.$$

Resposta à Excitação da Base

Para um problema com 1GL, com excitação através do movimento da base, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

introduzindo o deslocamento relativo $z = x - y$, ficamos com

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y},$$

que é uma equação de vibração forçada amortecida, para o deslocamento relativo z, com a força igual a $-m\ddot{y}$.
Podemos usar a integral de Duhamel com esta força.

Resposta à Excitação da Base

Para um problema com 1GL, com excitação através do movimento da base, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

introduzindo o deslocamento relativo $z = x - y$, ficamos com

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y},$$

que é uma equação de vibração forçada amortecida, para o deslocamento relativo z, com a força igual a $-m\ddot{y}$.
Podemos usar a integral de Duhamel com esta força.

Resposta à Excitação da Base

Introduzindo $F(\tau) = -m\ddot{y}(\tau)$ na integral de Duhamel, obtemos

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{y}(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau.$$

Obs: O movimento da massa pode ser calculado trivialmente, e lembramos que $y(t)$ é uma função conhecida!

Transformadas de Laplace

O procedimento é exatamente análogo àquele para determinação de funções de transferência.
No entanto, agora consideramos as condições iniciais não nulas, e fazemos a transformada inversa de tudo!

Teorema do valor inicial

$$x(t=0) = \lim_{s \to \infty} sX(s).$$

Teorema do valor final

$$x_{ss} = \lim_{s \to 0} sX(s).$$

x_{ss} é a resposta no regime permanente.

Transformadas de Laplace

O procedimento é exatamente análogo àquele para determinação de funções de transferência.
No entanto, agora consideramos as condições iniciais não nulas, e fazemos a transformada inversa de tudo!

Teorema do valor inicial

$$x(t=0) = \lim_{s \to \infty} sX(s).$$

Teorema do valor final

$$x_{ss} = \lim_{s \to 0} sX(s).$$

x_{ss} é a resposta no regime permanente.

Métodos Numéricos

Métodos numéricos são úteis quando métodos analíticos não são viáveis.

- Funções forçantes podem não ter integrais factíveis;
- Funções podem nem ter expressões analíticas;

A vibração linear de sistemas com 1GL é descrita por uma ODE linear de segunda ordem.
Existem **inúmeros** sistemas para resolver ODEs disponíveis.
Normalmente, os "integradores" de ODEs trabalham com sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.
O primeiro passo é transformar a equação de movimento em um sistema de equações de primeira ordem.

Mudança de Variáveis

A equação de movimento para um oscilador harmônico é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Introduzimos as variáveis

$$x_1(t) = x(t) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t).$$

A equação de movimento torna-se

$$m\dot{x}_2 + cx_2 + \kappa x_1 = f(t),$$

com $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$. Na forma de um sistema de ODEs de 1^a ordem, temos

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = (f(t) - cx_2 - \kappa x_1)/m \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$$

Mudança de Variáveis

A equação de movimento para um oscilador harmônico é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Introduzimos as variáveis

$$x_1(t) = x(t) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t).$$

A equação de movimento torna-se

$$m\dot{x}_2 + cx_2 + \kappa x_1 = f(t),$$

com $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$. Na forma de um sistema de ODEs de 1ª ordem, temos

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = (f(t) - cx_2 - \kappa x_1)/m \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$$

Mudança de Variáveis

A equação de movimento para um oscilador harmônico é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Introduzimos as variáveis

$$x_1(t) = x(t) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t).$$

A equação de movimento torna-se

$$m\dot{x}_2 + cx_2 + \kappa x_1 = f(t),$$

com $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$. Na forma de um sistema de ODEs de 1ª ordem, temos

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = (f(t) - cx_2 - \kappa x_1)/m \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$$

Forma Vetorial

É conveniente expressar o sistema de ODEs na forma vetorial,

$$\dot{\vec{X}} = \vec{F}(\vec{X}, t),$$

com

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{F}(\vec{X}, t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{1}{m}(f(t) - cx_2 - \kappa x_1). \end{bmatrix}$$

Métodos de Runge-Kutta

Na maioria dos integrados, o avanço no tempo da solução é da forma

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i,$$

onde $x_i = x(t_i)$, $x_{i+1} = x(t_{i+1})$, $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. A mágica está em calcular Δx_i adequadamente.

Normalmente, para integrar de 0 a T, divide-se o tempo total em n intervalos de duração $\Delta t = T/n$, assim

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \ldots t_i = i\Delta t, \ldots, T = n\Delta t.$$

Nos métodos de Runge-Kutta, constrói-se uma fórmula que coincide com a expansão em série de Taylor da função até a ordem k,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}\Delta t + \ddot{x}\frac{\Delta t^2}{2!} + \dddot{x}\frac{\Delta t^3}{3!} + \ldots$$

Métodos de Runge-Kutta

Na maioria dos integrados, o avanço no tempo da solução é da forma

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i,$$

onde $x_i = x(t_i)$, $x_{i+1} = x(t_{i+1})$, $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. A mágica está em calcular Δx_i adequadamente.

Normalmente, para integrar de 0 a T, divide-se o tempo total em n intervalos de duração $\Delta t = T/n$, assim

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \ldots t_i = i\Delta t, \ldots, T = n\Delta t.$$

Nos métodos de Runge-Kutta, constrói-se uma fórmula que coincide com a expansão em série de Taylor da função até a ordem k,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}\Delta t + \ddot{x}\frac{\Delta t^2}{2!} + \dddot{x}\frac{\Delta t^3}{3!} + \ldots$$

Métodos de Runge-Kutta

Na maioria dos integrados, o avanço no tempo da solução é da forma

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i,$$

onde $x_i = x(t_i)$, $x_{i+1} = x(t_{i+1})$, $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. A mágica está em calcular Δx_i adequadamente.

Normalmente, para integrar de 0 a T, divide-se o tempo total em n intervalos de duração $\Delta t = T/n$, assim

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots t_i = i\Delta t, \dots, T = n\Delta t.$$

Nos métodos de Runge-Kutta, constrói-se uma fórmula que coincide com a expansão em série de Taylor da função até a ordem k,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}\Delta t + \ddot{x}\frac{\Delta t^2}{2!} + \dddot{x}\frac{\Delta t^3}{3!} + \dots$$

Métodos de Runge-Kutta

Nas fórmulas de Runge-Kutta, são determinados coeficientes que calculam as expressões acima recursivamente, sem a necessidade do cálculo de derivadas de ordem superior.

Por exemplo, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é, partindo da condição inicial

$$\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix},$$

calcular recursivamente

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \frac{1}{6}\left[\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4,\right]$$

com $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3, \vec{K}_4$ calculados como a seguir.

Métodos de Runge-Kutta

Nas fórmulas de Runge-Kutta, são determinados coeficientes que calculam as expressões acima recursivamente, sem a necessidade do cálculo de derivadas de ordem superior.
Por exemplo, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é, partindo da condição inicial

$$\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix},$$

calcular recursivamente

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \frac{1}{6}\left[\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4,\right]$$

com $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3, \vec{K}_4$ calculados como a seguir.

Métodos de Runge-Kutta

Método de Runge-Kutta de quarta ordem,

$$\begin{aligned}
\vec{K}_1 &= h\vec{F}(\vec{X}_i, t_i), \\
\vec{K}_2 &= h\vec{F}(\vec{X}_i + \frac{1}{2}\vec{K}_1, t_i + \frac{1}{2}h), \\
\vec{K}_3 &= h\vec{F}(\vec{X}_i + \frac{1}{2}\vec{K}_2, t_i + \frac{1}{2}h), \\
\vec{K}_4 &= h\vec{F}(\vec{X}_i + \vec{K}_3, t_{i+i}),
\end{aligned}$$

com $h = \Delta t$.

Observação: Os sistemas computacionais modernos normalmente implementam métodos muito mais sofisticados do que isto, que já é bem bom.

Métodos de Runge-Kutta

Método de Runge-Kutta de quarta ordem,

$$\begin{aligned}
\vec{K}_1 &= h\vec{F}(\vec{X}_i, t_i), \\
\vec{K}_2 &= h\vec{F}(\vec{X}_i + \frac{1}{2}\vec{K}_1, t_i + \frac{1}{2}h), \\
\vec{K}_3 &= h\vec{F}(\vec{X}_i + \frac{1}{2}\vec{K}_2, t_i + \frac{1}{2}h), \\
\vec{K}_4 &= h\vec{F}(\vec{X}_i + \vec{K}_3, t_{i+i}),
\end{aligned}$$

com $h = \Delta t$.

Observação: Os sistemas computacionais modernos normalmente implementam métodos muito mais sofisticados do que isto, que já é bem bom.