Vibrações Mecânicas

Vibração Forçada – Sistemas com 1 GL
Funções de Transferência

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2015.1

Introdução

- Baseada em Transformadas de Laplace;
- Técnica típica de Controle;
- Relaciona entrada e a saída de um sistema mecânico;
- Permite o tratamento isolado:
  - Entrada;
  - Sistema;
  - Saída;
- Converte o problema diferencial em um problema algébrico;
- Nunca vamos fazer transformadas "na mão";

Definição

Função de Transferência

A Função de Transferência de uma equação diferencial linear e invariante no tempo é a razão entre as transformadas de Laplace da resposta e da função forçante, supondo condições inciais nulas.

Transformada de Laplace

Supondo $f(t)$ definida para qualquer $t \geq 0$, definimos

Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

A variável s é uma variável auxiliar, geralmente complexa, chamada de Variável de Laplace, e e^{-st} é o núcleo da transformada.

Transformada Inversa

Para encontrar $f(t)$ a partir de uma transformada $F(s)$, aplicamos a

Transformada Inversa

A Transformada Inversa de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{s=\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}\,ds = f(t)u(t)$$

Onde

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

e σ é um valor à direita de todas as singularidades de $F(s)$.

Observação: Isto é muito raramente usado na prática.

Propriedades

Da linearidade da integração:

Linearidade

$$\mathcal{L}\left[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\right] = \alpha_1 \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + \alpha_2 \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$$

Propriedades

Usando integração por partes:

Transformada de Derivadas

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = -f(0) + sF(s)$$

e

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = -\dot{f}(0) - sf(0) + s^2F(s).$$

Propriedades

Teorema do Deslocamento

$$\mathcal{L}\left[f(t)e^{at}\right] = F(s-a)$$

Propriedades

Definindo a convolução de duas funções como

$$f(t) = f_1(t) \star f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau,$$

temos que a transformada da convolução é

Transformada da Convolução

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) \star f_2(t)\right] = F_1(s) F_2(s) = \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] \mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$$

Tabela

1. $c_1F(s) + c_2G(s)$	$c_1f(t) + c_2g(t)$
2. $F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(a \cdot t)a$
3. $F(s)G(s)$	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$
4. $s^nF(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{n-j}\frac{d^{j-1}f}{dt^{j-1}}(0)$	$\frac{d^nf}{dt^n}(t)$
5. $\frac{1}{s^n}F(s)$	$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{n} f(\tau)\,d\tau \cdots d\tau$

Tabela

6.	$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$
7.	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$	$t^n;\ n = 1, 2, \ldots, t$
8.	$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}
9.	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
10.	$\dfrac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
11.	$\dfrac{s+a}{s^2}$	$1 + at$

Tabela

12. $\dfrac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at - (1 - e^{-at})$
13. $\dfrac{s+b}{s(s+a)}$	$\dfrac{b}{a}\left\{1 - \left(1 - \dfrac{a}{b}\right)e^{-at}\right\}$
14. $\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
15. $\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
16. $\dfrac{a^2}{s(s^2+a^2)}$	$1 - \cos at$

Tabela

17. $\dfrac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
18. $\dfrac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$
19. $\dfrac{a(s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^2}$	$at \cos at$

Tabela

20. $\dfrac{2sa^2}{(s^2+a^2)^2}$	$at \sin at$
21. $\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
22. $\dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin bt$
23. $\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{(b-a)}$

Tabela

24. $\dfrac{s+w}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{\{(w-a)e^{-at}-(w-b)e^{-bt}}{(b-a)}$
25. $\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
26. $\dfrac{s+w}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{(w-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{(w-b)e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{(w-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$

Tabela

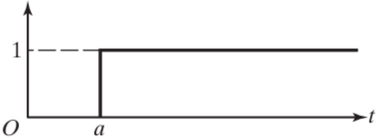
27.* $\dfrac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\dfrac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$
28. $\dfrac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$-\dfrac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t - \phi_1)$
29.* $\dfrac{s + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\dfrac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1)$
30.* $\dfrac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \dfrac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1)$
31.* $\dfrac{s + \zeta\omega_n}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1)$

Tabela

32. 1

Unit impulse at $t = 0$

33. $\dfrac{e^{-as}}{s}$



Unit step function at $t = a$

Caso Geral

Considerando uma equação diferencial linear, invariante no tempo, de ordem n,

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 f(t),$$

tomamos a Transformada de Laplace de ambos os lados.

Caso Geral – Solução

A transformada é

$$\begin{aligned} a_n s^n X(s) + a_{n-1} s^{n-1} X(s) + \dots \\ + a_0 X(s) + \text{termos iniciais para x(t)} = \\ b_m s^m F(s) + b_{m-1} s^{m-1} F(s) + \dots \\ + b_0 F(s) + \text{termos iniciais para x(t)}, \end{aligned}$$

que é uma expressão puramente algébrica na qual podemos colocar em evidência $X(s)$ e $F(s)$, para condições iniciais nulas.

Caso Geral – Função de Transferência

Colocando $X(s)$ e $F(s)$ em evidência,

$$\left\{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_0\right\} X(s) = \left\{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0\right\} F(s),$$

ou

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_0}$$

Se a função de transferência de um sistema for conhecida, a saída pode ser calculada simplesmente como

$$X(s) = T(s)F(s)$$

Caso Geral – Função de Transferência

Colocando $X(s)$ e $F(s)$ em evidência,

$$\left\{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_0\right\} X(s) = \left\{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0\right\} F(s),$$

ou

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_0}$$

Se a função de transferência de um sistema for conhecida, a saída pode ser calculada simplesmente como

$$X(s) = T(s)F(s)$$

Caso Geral – Função de Transferência

Colocando $X(s)$ e $F(s)$ em evidência,

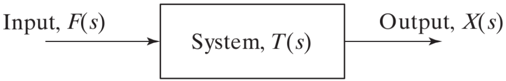
$$\left\{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots a_0\right\} X(s) = \left\{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0\right\} F(s),$$

ou

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots a_0}$$

Se a função de transferência de um sistema for conhecida, a saída pode ser calculada simplesmente como

$$X(s) = T(s)F(s)$$



Sistemas com 1 GL

Especializando para 1 GL,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t)$$

Tomando a transformada da equação,

$$m\mathcal{L}\left[\ddot{x}\right] + c\mathcal{L}\left[\dot{x}\right] + \kappa\mathcal{L}\left[x\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

ou

$$m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + c\left\{sX(s) - x(0)\right\} + \kappa X(s) = F(s)$$

ou ainda,

$$\left(ms^2 + cs + \kappa\right)X(s) - \left(msx(0) + m\dot{x}(0) + sx(0)\right) = F(s)$$

Sistemas com 1 GL

Especializando para 1 GL,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t)$$

Tomando a transformada da equação,

$$m\mathcal{L}[\ddot{x}] + c\mathcal{L}[\dot{x}] + \kappa\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f(t)]$$

ou

$$m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + c\left\{sX(s) - x(0)\right\} + \kappa X(s) = F(s)$$

ou ainda,

$$\left(ms^2 + cs + \kappa\right)X(s) - \left(msx(0) + m\dot{x}(0) + sx(0)\right) = F(s)$$

Sistemas com 1 GL

Especializando para 1 GL,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t)$$

Tomando a transformada da equação,

$$m\mathcal{L}\left[\ddot{x}\right] + c\mathcal{L}\left[\dot{x}\right] + \kappa\mathcal{L}\left[x\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

ou

$$m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + c\left\{sX(s) - x(0)\right\} + \kappa X(s) = F(s)$$

ou ainda,

$$\left(ms^2 + cs + \kappa\right)X(s) - \left(msx(0) + m\dot{x}(0) + sx(0)\right) = F(s)$$

Sistemas com 1 GL

Especializando para 1 GL,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t)$$

Tomando a transformada da equação,

$$m\mathcal{L}[\ddot{x}] + c\mathcal{L}[\dot{x}] + \kappa\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f(t)]$$

ou

$$m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + c\left\{sX(s) - x(0)\right\} + \kappa X(s) = F(s)$$

ou ainda,

$$\left(ms^2 + cs + \kappa\right)X(s) - \left(msx(0) + m\dot{x}(0) + sx(0)\right) = F(s)$$

Sistemas com 1 GL – Função de Transferência

Para condições iniciais nulas,

$$T(s) = \frac{\mathcal{L}\,[\text{saída}]}{\mathcal{L}\,[\text{entrada}]} = \frac{X(s)}{F(s)}$$

$$T(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + \kappa}$$

Propriedades da Função de Transferência

- Não usamos o fato de $f(t)$ ser periódica!
- $T(s)$ é uma propriedade do sistema, independe das funções de entrada e saída.
- Sistemas físicos diferentes podem ter a mesma função de transferência.
- É relativamente mais fácil medir a função de transferência do que medir os parâmetros físicos diretamente.
- Em vibrações pode ser interessante medir a função de transferência da aceleração, $s^2X(s)/F(s)$.
- A função de transferência é uma função complexa! (s é uma variável complexa.)

Resposta Usando Funções de Transferência

Para condições iniciais nulas,

$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + \kappa} = \frac{F(s)}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{\kappa}{m}\right)}$$

ou

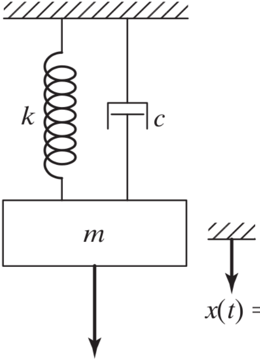
$$X(s) = \frac{F(s)}{m\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)}$$

Podemos resolver isto analiticamente, conforme o livro, mas eu prefiro uma coisa diferente.

Funções de Transferência em Frequência

- A resposta no regime permanente para uma excitação harmônica é um deslocamento harmônico.
- A resposta tem amplitude (é claro) e fase diferentes da excitação.
- Tanto a amplitude quanto a fase são funções da frequência de excitação.
- Vamos representar todas as funções harmônicas por fasores.
- O fasor de entrada é $M_i \sin(\omega t + \phi_i)$, ou simplificadamente, $M_i(\omega)e^{i\phi_i}$, onde a frequência fica subentendida!.
- Como a saída é também um fasor, vamos considerar que o sistema é uma função que transforma o fasor de entrada em um fasor de saída $M_o(\omega)e^{i\phi_0}$.

Sistema Físico

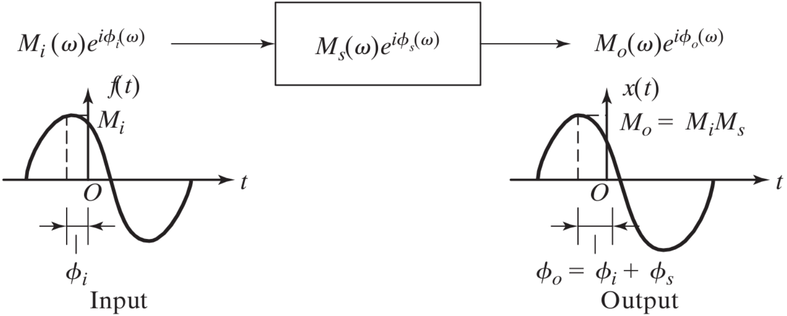


$$x(t) = M_o \cos(\omega t + \phi_o) = M_o(\omega) e^{i\phi_o(\omega)}$$

$$f(t) = M_i \cos(\omega t + \phi_i) = M_i(\omega) e^{i\phi_i(\omega)}$$

(a) Physical system

Diagrama de Blocos



(b) Block diagram

Funções de Transferência em Frequência

- Multiplicar um fasor por outro de mesma frequência altera sua fase e amplitude, mas não a frequência.
- O efeito do sistema pode então ser representado pela multiplicação por um fasor.

Assim,

$$M_o(\omega)e^{i\phi_0(\omega)} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}$$

ou

$$M_o(\omega)e^{i\phi_0(\omega)} = M_s(\omega)M_i(\omega)e^{i\{\phi_s(\omega)+\phi_i(\omega)\}}$$

É claro então que:

$$M_s(\omega) = \frac{M_o(\omega)}{M_i(\omega)} \qquad \text{e} \qquad \phi_s(\omega) = \phi_o(\omega) - \phi_i(\omega).$$

Funções de Transferência em Frequência

- Multiplicar um fasor por outro de mesma frequência altera sua fase e amplitude, mas não a frequência.
- O efeito do sistema pode então ser representado pela multiplicação por um fasor.

Assim,

$$M_o(\omega)e^{i\phi_0(\omega)} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}$$

ou

$$M_o(\omega)e^{i\phi_0(\omega)} = M_s(\omega)M_i(\omega)e^{i\{\phi_s(\omega)+\phi_i(\omega)\}}$$

É claro então que:

$$M_s(\omega) = \frac{M_o(\omega)}{M_i(\omega)} \qquad \text{e} \qquad \phi_s(\omega) = \phi_o(\omega) - \phi_i(\omega).$$

Funções de Transferência em Frequência

- Multiplicar um fasor por outro de mesma frequência altera sua fase e amplitude, mas não a frequência.
- O efeito do sistema pode então ser representado pela multiplicação por um fasor.

Assim,

$$M_o(\omega)e^{i\phi_0(\omega)} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}$$

ou

$$M_o(\omega)e^{i\phi_0(\omega)} = M_s(\omega)M_i(\omega)e^{i\{\phi_s(\omega)+\phi_i(\omega)\}}$$

É claro então que:

$$M_s(\omega) = \frac{M_o(\omega)}{M_i(\omega)} \qquad \text{e} \qquad \phi_s(\omega) = \phi_o(\omega) - \phi_i(\omega).$$

Funções de Transferência em Frequência

- Multiplicar um fasor por outro de mesma frequência altera sua fase e amplitude, mas não a frequência.
- O efeito do sistema pode então ser representado pela multiplicação por um fasor.

Assim,

$$M_o(\omega)e^{i\phi_0(\omega)} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}$$

ou

$$M_o(\omega)e^{i\phi_0(\omega)} = M_s(\omega)M_i(\omega)e^{i\{\phi_s(\omega)+\phi_i(\omega)\}}$$

É claro então que:

$$M_s(\omega) = \frac{M_o(\omega)}{M_i(\omega)} \qquad \text{e} \qquad \phi_s(\omega) = \phi_o(\omega) - \phi_i(\omega).$$

Função de Transferência em Frequência

Por conveniência notacional, definimos a função de transferência em frequência,

$$T(i\omega) = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}.$$

Podemos obter a função de transferência em frequência a partir da função de transferência para um sistema m, c, k,

$$T(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + \kappa},$$

simplesmente fazendo $s = i\omega$,

$$T(i\omega) = \frac{1}{\kappa - m\omega^2 + i\omega c}.$$

Função de Transferência em Frequência

Por conveniência notacional, definimos a função de transferência em frequência,

$$T(i\omega) = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}.$$

Podemos obter a função de transferência em frequência a partir da função de transferência para um sistema m, c, k,

$$T(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + \kappa},$$

simplesmente fazendo $s = i\omega$,

$$T(i\omega) = \frac{1}{\kappa - m\omega^2 + i\omega c}.$$

Função de Transferência em Frequência

Igualando a expressão anterior à função de transferência em frequência,

$$T(i\omega) = \frac{1}{\kappa - m\omega^2 + i\omega c} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)} = \frac{M_o(\omega)e^{i\phi_0(\omega)}}{M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}},$$

isto ocorre quando

$$M_o(\omega) = 1, \qquad \phi_o(\omega) = 0,$$

$$M_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$\phi_i(\omega) = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right)$$

Função de Transferência em Frequência

Igualando a expressão anterior à função de transferência em frequência,

$$T(i\omega) = \frac{1}{\kappa - m\omega^2 + i\omega c} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)} = \frac{M_o(\omega)e^{i\phi_0(\omega)}}{M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}},$$

isto ocorre quando

$$M_o(\omega) = 1, \qquad \phi_o(\omega) = 0,$$
$$M_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$
$$\phi_i(\omega) = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right)$$

Função de Transferência em Frequência

Observamos facilmente que a magnitude de $T(i\omega)$ é,

$$M_s(s) = |T(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

e o ângulo de fase é

$$\phi_s(\omega) = \arctan\left(\frac{c\omega}{m\omega^2 - \kappa}\right)$$

Observação: Apesar de feito para um oscilador harmônico amortecido, o procedimento é válido para qualquer equação diferencial linear, invariante no tempo, de ordem n.

Função de Transferência em Frequência

Observamos facilmente que a magnitude de $T(i\omega)$ é,

$$M_s(s) = |T(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

e o ângulo de fase é

$$\phi_s(\omega) = \arctan\left(\frac{c\omega}{m\omega^2 - \kappa}\right)$$

Observação: Apesar de feito para um oscilador harmônico amortecido, o procedimento é válido para qualquer equação diferencial linear, invariante no tempo, de ordem n.

Representação Gráfica

- Para forçantes harmônicos, a resposta é harmônica;
- Pode ser representada pela amplitude e fase;
- Ambos variam com a frequência de excitação;
- É conveniente mostrar ambas grandezas em função da frequência de excitação;
- Isto descreve completamente a dinâmica de um oscilador harmônico, para o regime permanente apenas!
- Gráficos padrão são usados na indústria;
- Como a escala de variação de amplitudes e frequências pode ser muito grande, naturalmente usa-se escalas logarítmicas.

Diagrama de Bode

A maneira mais clássica de representar a resposta de um sistema é através do Diagrama de Bode.

- 2 gráficos: $T(i\omega) \times \omega$ e $\phi \times \omega$;
- Ambas as escalas são logarítimicas para os dois gráficos;
- Usa-se decibel como unidade;
- O decibel é sempre um medida relativa;
- A função de transferência mede a relação entre amplitudes;

$$m = 10\log_{10}(M^2) = 20\log_{10} M \, \text{dB}$$

Value of N	0.001	0.01	0.1	0.5	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100	1000
dB Value	-60	-40	-20	-6	-2	0	3	6	20	40	60

Exemplo

Para um sistema com função de transferência

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{1}$$

podemos obter a função de transferência em frequência substituindo s por $i\omega$,

$$T(i\omega) = \frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(i\omega) + \omega_n^2}, \tag{2}$$

ou, alternativamente

$$T(i\omega) = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r}. \tag{3}$$

Exemplo

A magnitude da função de transferência é

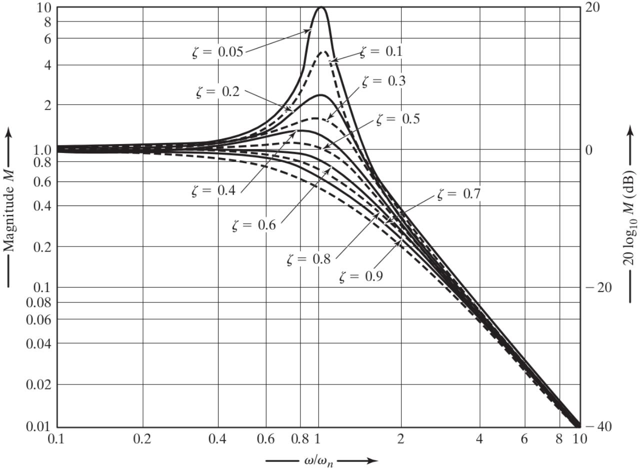
$$M = |T(i\omega)| = \left| \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}. \qquad (4)$$

O ângulo de fase é

$$\phi = \arctan \frac{2\zeta r}{1 - r^2}. \qquad (5)$$

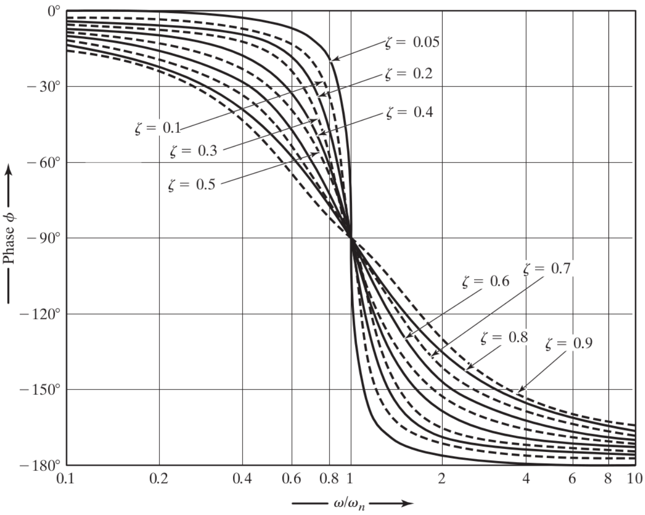
Plotando o log das funções acima em função da frequência, temos,

Diagrama de Bode – Frequência



(a) Magnitude

Diagrama de Bode – Frequência



(b) Phase