Vibrações Mecânicas

Vibração Forçada – Sistemas com 1 GL
Excitação Harmônica

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

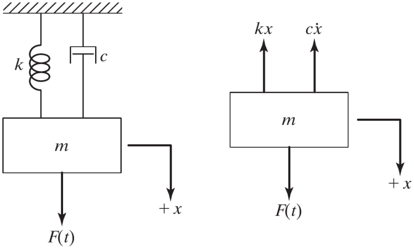
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2015.1

Introdução

- Na vibração forçada energia é adicionada ao sistema;
- Tanto força quanto deslocamentos podem ser impostos;
- Tipos de excitação:
  - Harmônica;
  - Periódica não harmônica;
  - Não periódica;
  - Aleatória;
- Pode ocorrer ressonância;
- A resposta harmônica é o fundamento de todo o estudo.

Equação de Movimento



Do DCL,

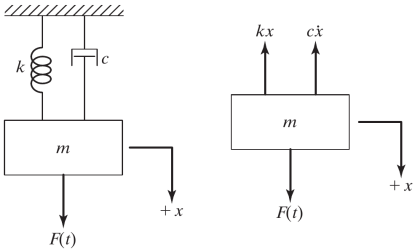
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F(t),$$

a solução desta EDO é a solução $x_h(t)$ da equação homogênea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0$$

somada com a solução particular $x_p(t)$.

Equação de Movimento



Do DCL,

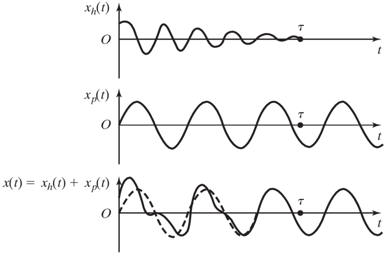
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F(t),$$

a solução desta EDO é a solução $x_h(t)$ da equação homogênea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0$$

somada com a solução particular $x_p(t)$.

Regimes Transiente e Permanente



- Sempre que há amortecimento, $x_h(t) \to 0$!
- A solução $x(t)$ portanto torna-se $x_p(t)$ apenas;
- A solução total é uma combinação dos regimes transiente permanente;
- Muitas vezes na engenharia consideramos apenas o regime permanente.

Solução Homogênea

Considerando que o amortecimento é nulo, sob uma força harmônica

$$F(t) = F_0 \cos \omega t,$$

a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + \kappa x = F_0 \cos \omega t,$$

cuja solução da equação homogênea é, obviamente,

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

Solução Particular

Supondo que a solução particular seja

$$x_p(t) = X \cos \omega t,$$

substituímos esta solução na equação particular, obtendo

$$-m\omega^2 X \cos \omega t + \kappa X \cos \omega t = F_0 \cos \omega t.$$

Claramente

$$(-m\omega^2 + \kappa)X = F_0,$$

ou

$$X = \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} = \frac{\delta_{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Solução Geral

A solução geral é então

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Aplicando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, temos

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n},$$

e, finalmente,

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Solução Geral

A solução geral é então

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Aplicando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, temos

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n},$$

e, finalmente,

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}\right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Solução Geral

A solução geral é então

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Aplicando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, temos

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n},$$

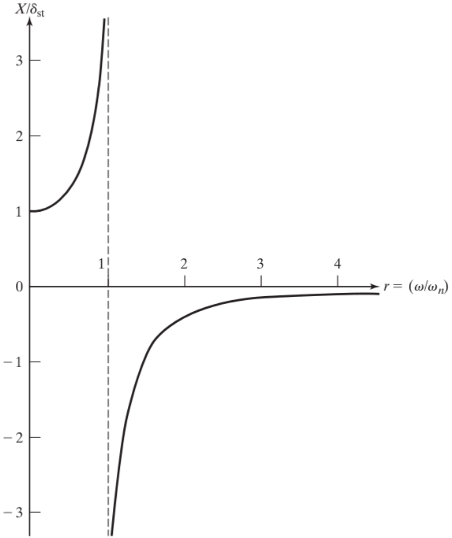
e, finalmente,

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Fator de Amplificação

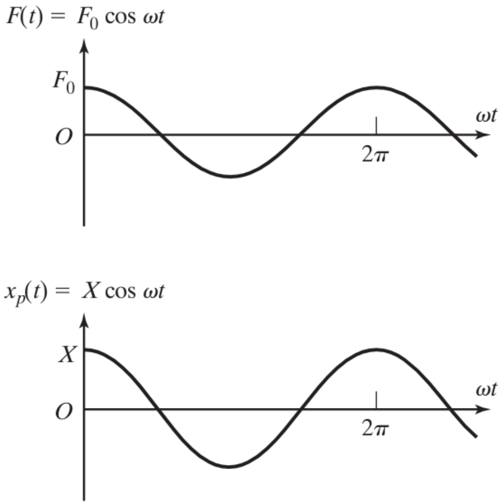
Para a solução *particular*, temos:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



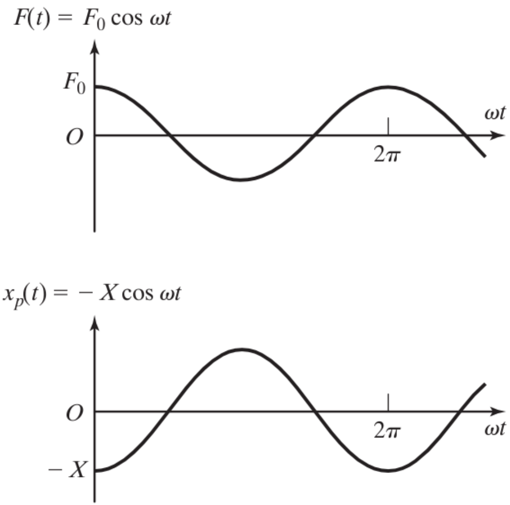
Resposta para $0 < \omega/\omega_n < 1$

O fator de amplificação é positivo e a resposta é em fase com a excitação.



Resposta para $\omega/\omega_n > 1$

O fator de amplificação é negativo e a resposta está em oposição de fase à excitação.



Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

Isto é, $\omega = \omega_n$, ressonância!

A resposta total pode ser reescrita como:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \delta_{\mathrm{st}} \left(\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right)$$

O último termo tende para infinito, mas isto ocorre instantaneamente?

Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

Isto é, $\omega = \omega_n$, ressonância!
A resposta total pode ser reescrita como:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \delta_{\mathrm{st}} \left(\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right)$$

O último termo tende para infinito, mas isto ocorre instantaneamente?

Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

Isto é, $\omega = \omega_n$, ressonância!
A resposta total pode ser reescrita como:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \delta_{\mathrm{st}} \left(\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right)$$

O último termo tende para infinito, mas isto ocorre instantaneamente?

Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

Aplicando a regra de L'Hospital,

$$\lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = \lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{\frac{d}{d\omega}(\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\frac{d}{d\omega}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)} \right],$$

o que dá

$$\lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{t \sin \omega t}{2\frac{\omega}{\omega_n^2}} \right] = \frac{\omega_n t}{2} \sin \omega_n t$$

Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

Aplicando a regra de L'Hospital,

$$\lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = \lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{\frac{d}{d\omega}(\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\frac{d}{d\omega}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)} \right],$$

o que dá

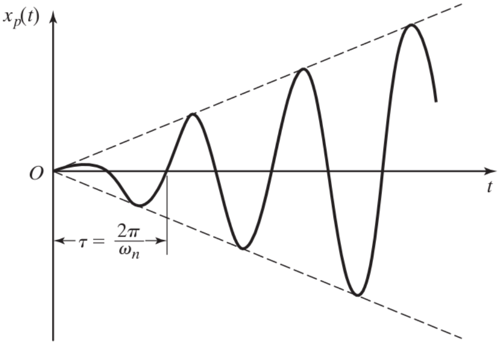
$$\lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{t \sin \omega t}{2\frac{\omega}{\omega_n^2}} \right] = \frac{\omega_n t}{2} \sin \omega_n t$$

Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

A resposta total, na ressonância, é então

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \delta_{\mathrm{st}} \frac{\omega_n t}{2} \sin \omega_n t.$$

A forma da solução particular é:



Resposta Total

Podemos escrever a resposta total para $\omega/\omega_n < 1$ como

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\cos\omega t,$$

e, para $\omega > \omega_n$,

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\cos\omega t,$$

Claramente, temos a soma de duas funções harmônicas de frequências *distintas*.

Resposta Total

Podemos escrever a resposta total para $\omega/\omega_n < 1$ como

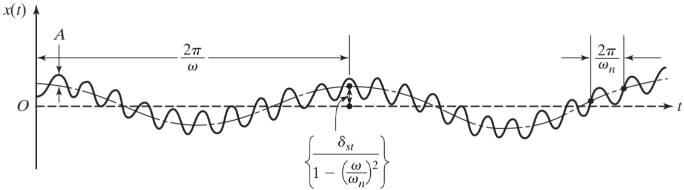
$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\cos\omega t,$$

e, para $\omega > \omega_n$,

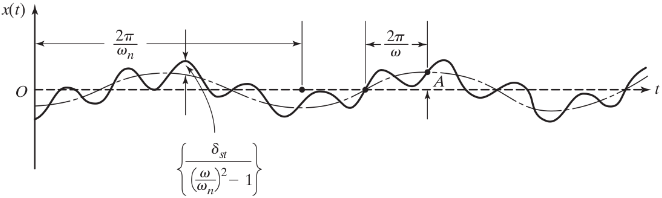
$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\cos\omega t,$$

Claramente, temos a soma de duas funções harmônicas de frequências *distintas*.

Resposta Total



(a) $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$



(b) $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$

Batimento

Se a frequência natural e a frequência de excitação são próximas, pode ocorrer batimento.
Para $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, a resposta total é

$$x(t) = -\frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}\cos\omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}\cos\omega t,$$

ou

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_n t),$$

ou ainda,

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2}\left[2\sin\frac{\omega + \omega_n}{2}t\sin\frac{\omega - \omega_n}{2}t\right]$$

Batimento

Supondo que

$$\omega_n - \omega = 2\epsilon, \qquad \epsilon \ll 1,$$

então $\omega \approx \omega_n$ e

$$\omega + \omega_n \approx 2\omega.$$

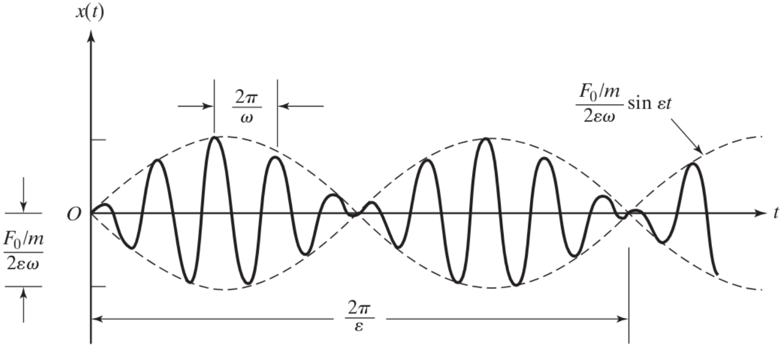
Multiplicando estas duas equações,

$$\omega_n^2 - \omega^2 = 4\epsilon\omega,$$

e a resposta total torna-se

$$x(t) = \left[\frac{F_0/m}{2\epsilon\omega}\sin\epsilon t\right]\sin\omega t$$

Batimento



$$\tau_b = \frac{2\pi}{\epsilon} = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega} \qquad \omega_b = 2\epsilon = \omega_n - \omega$$

Força Harmônica

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 \cos \omega t.$$

Introduzindo uma solução particular harmônica,

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi),$$

na equação de movimento, temos

$$-m\omega^2 X \cos(\omega t - \phi) - c\omega X \sin(\omega t - \phi) + \kappa X \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t,$$

ou

$$X \left[(\kappa - m\omega) \cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi) \right] = F_0 \cos \omega t.$$

Força Harmônica

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 \cos \omega t.$$

Introduzindo uma solução particular harmônica,

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi),$$

na equação de movimento, temos

$$-m\omega^2 X \cos(\omega t - \phi) - c\omega X \sin(\omega t - \phi) + \kappa X \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t,$$

ou

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi)\right] = F_0 \cos \omega t.$$

Força Harmônica

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 \cos \omega t.$$

Introduzindo uma solução particular harmônica,

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi),$$

na equação de movimento, temos

$$-m\omega^2 X \cos(\omega t - \phi) - c\omega X \sin(\omega t - \phi) + \kappa X \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t,$$

ou

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi)\right] = F_0 \cos \omega t.$$

Solução Particular

Repetindo,

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega\sin(\omega t - \phi)\right] = F_0\cos\omega t.$$

Expandindo as diferenças, temos

$$X\left[(\kappa - m\omega^2)(\cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi) - c\omega(\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi)\right] = F_0\cos\omega t$$

e rearrumando

$$X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right]\cos\omega t + X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right]\sin\omega t = F_0\cos\omega t.$$

Solução Particular

Repetindo,

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega\sin(\omega t - \phi)\right] = F_0\cos\omega t.$$

Expandindo as diferenças, temos

$$\begin{aligned} X\Big[(\kappa - m\omega^2)(\cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi) \\ - c\omega(\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi)\Big] = F_0\cos\omega t \end{aligned}$$

e rearrumando

$$\begin{aligned} X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right]\cos\omega t + \\ X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right]\sin\omega t = F_0\cos\omega t. \end{aligned}$$

Solução Particular

Repetindo,

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega\sin(\omega t - \phi)\right] = F_0\cos\omega t.$$

Expandindo as diferenças, temos

$$\begin{aligned} X\Big[(\kappa - m\omega^2)(\cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi) \\ - c\omega(\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi)\Big] = F_0\cos\omega t \end{aligned}$$

e rearrumando

$$\begin{aligned} X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right]\cos\omega t + \\ X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right]\sin\omega t = F_0\cos\omega t. \end{aligned}$$

Solução Particular

Igualando os termos em ωt,

$$\begin{cases} X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right]\cos\omega t = F_0\cos\omega t \\ X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right]\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

Resolvendo para X,

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

e da segunda equação,

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

Solução Particular

Igualando os termos em ωt,

$$\begin{cases} X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right]\cos\omega t = F_0\cos\omega t \\ X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right]\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

Resolvendo para X,

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

e da segunda equação,

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

Solução Particular

Igualando os termos em ωt,

$$\begin{cases} X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right]\cos\omega t = F_0\cos\omega t \\ X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right]\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

Resolvendo para X,

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

e da segunda equação,

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

Solução Particular

Resumindo, a solução particular é

$$x_p(t) = X\cos(\omega_n t - \phi),$$

com

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

Solução Particular

Resumindo, a solução particular é

$$x_p(t) = X\cos(\omega_n t - \phi),$$

com

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

Solução Particular – Forma adimensional

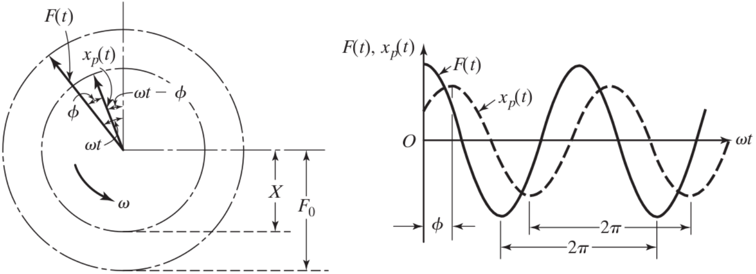
Introduzindo as variáveis

$$
\begin{aligned}
\omega_n &= \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \\
\zeta &= \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}; \qquad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n, \\
\delta_{\mathrm{st}} &= \frac{F_0}{k}, \quad \text{e} \\
r &= \frac{\omega}{\omega_n},
\end{aligned}
$$

obtemos

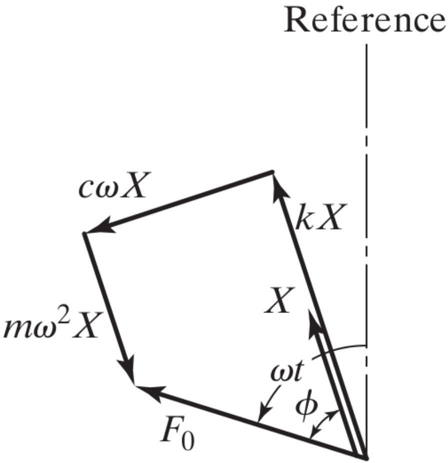
$$
M = \frac{X}{\delta_{\mathrm{st}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \text{e} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)
$$

Solução Particular – Representação Gráfica

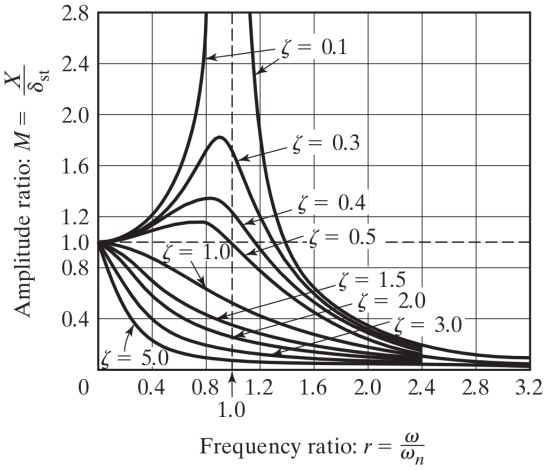


(a) Graphical representation

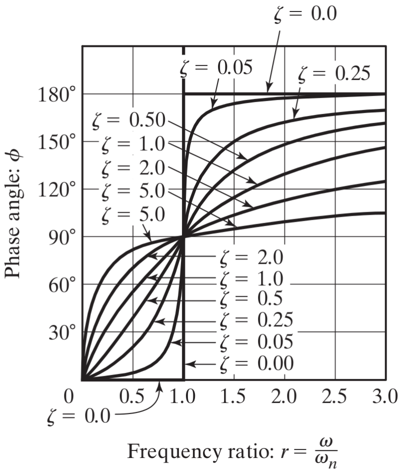
Solução Particular – Representação Vetorial



Fator de Amplificação



Ângulo de Fase



Fator de amplificação

Principais características:

- O comportamento de reduz ao de um sistema não amortecido para $\zeta = 0$.
- *Qualquer* valor de amortecimento diminui o fator de amplificação para todas as frequências.
- Para um dada frequência, aumentar o amortecimento reduz a amplificação.
- Para uma força constante, $r \to 0$, $M \to 1$.
- A redução de amplitude é muito importante próxima da ressonância.
- Para frequências altas, a amplitude diminui com o aumento da frequência, e $M \to 0$ quando $r \to \infty$.

Fator de amplificação – Valores Especiais

- Para $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$, o máximo de M ocorre para

$$r = \sqrt{(1 - 2\zeta^2)} \qquad \text{ou} \qquad \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

- O valor máximo de M, para $r = \sqrt{(1 - 2\zeta^2)}$, é

$$M_{\text{max}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- Para $r = 1$,

$$M = \frac{1}{2\zeta}$$

- Para $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{dM}{dr} = 0$ para $r = 0$. Se $r > 0$, M decresce monotonamente.

Ângulo de Fase

- Para $\zeta = 0$, a resposta está em fase para $\omega < \omega_n$ e 180° fora de fase para $\omega > \omega_n$.
- Para $\zeta > 0$ e $0 < r < 1$, $0 < \phi < 90^\circ$, isto é, a resposta está atrasada em em relação à excitação.
- Para $\zeta > 0$ e $r > 1$, $90^\circ < \phi < 180^\circ$, isto é, a resposta está adiantada em em relação à excitação.
- Para $\zeta > 0$ e $r = 1$, $\phi = 90^\circ$, a resposta é ortogonal à excitação.
- para $\zeta > 0$ e $r \to \infty$, $\phi \to 180^\circ$ e a resposta tende a ficar em oposição de fase com a excitação.

Resposta Total

A solução total é dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

no caso, para um sistema subamortecido,

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi_0) + X\cos(\omega_n t - \phi),$$
$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n,$$

com X_0 e ϕ_0 determinados a partir das condições iniciais, usando esta equação!.

Condições Iniciais

O deslocamento é

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi_0) + X\cos(\omega_n t - \phi),$$

e a velocidade,

$$\dot{x}(t) = -X_0\left[\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi_0) + \omega_d e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t - \phi_0)\right] + \\ -\omega_n X\sin(\omega_n t - \phi).$$

Tomando $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, temos que

$$\begin{aligned} x_0 &= X_0\cos\phi_0 + X\cos\phi, \\ \dot{x}_0 &= -\zeta\omega_n X_0\cos\phi_0 + \omega_d X_0\sin\phi_0 + \omega X\sin\phi, \end{aligned}$$

e, resolvendo para X_0 e ϕ_0,

Condições Iniciais

temos

$$X_0 = \left[(x_0 - X\cos\phi)^2 + \frac{1}{\omega_d^2}(\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n X\cos\phi - \omega X\sin\phi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

e

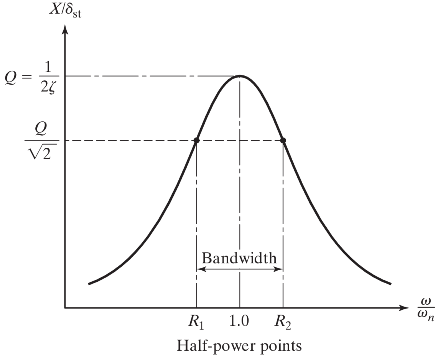
$$\phi_0 = \arctan\frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n X\cos\phi - \omega X\sin\phi}{\omega_d(x_0 - X\cos\phi)}$$

Fator de Qualidade

Para amortecimentos muito pequenos, ($\zeta < 0.05$),

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} \approx \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta} = Q$$

R_1, R_2, são os *pontos de meia potência.* ($\Delta W = \pi c \omega X^2$)
$R_2 - R_1$: largura de banda (*bandwidth*)



Cálculo das Raízes

Para R_1 e R_2,

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\zeta}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

o que leva a

$$r^4 - r^2(2-4\zeta^2) + (1-8\zeta^2) = 0.$$

Resolvendo para r_1^2 e r_2^2, temos

$$r_{(1,2)}^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}.$$

Para baixo amortecimento,

$$r_1^2 = R_1^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 \approx 1-2\zeta \qquad \text{e} \qquad r_2^2 = R_2^2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 \approx 1+2\zeta.$$

Cálculo das Raízes

Para R_1 e R_2,

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\zeta}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

o que leva a

$$r^4 - r^2(2-4\zeta^2) + (1-8\zeta^2) = 0.$$

Resolvendo para r_1^2 e r_2^2, temos

$$r_{(1,2)}^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}.$$

Para baixo amortecimento, e definindo $\omega_1 = \omega|_{R_1}$ e $\omega_2 = \omega|_{R_2}$, temos

$$r_1^2 = R_1^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 \approx 1-2\zeta \qquad \text{e} \qquad r_2^2 = R_2^2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 \approx 1+2\zeta.$$

Relação com ζ

Da definição,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 = 4\zeta\omega_n^2,$$

mas, é claro que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1),$$

e da "simetria",

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n,$$

então

$$2\omega_n(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_n^2,$$

o que leva a

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\zeta} = Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Relação com ζ

Da definição,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 = 4\zeta\omega_n^2,$$

mas, é claro que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1),$$

e da "simetria",

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n,$$

então

$$2\omega_n(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_n^2,$$

o que leva a

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\zeta} = Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Relação com ζ

Da definição,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 = 4\zeta\omega_n^2,$$

mas, é claro que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1),$$

e da "simetria",

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n,$$

então

$$2\omega_n(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_n^2,$$

o que leva a

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\zeta} = Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Relação com ζ

Da definição,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 = 4\zeta\omega_n^2,$$

mas, é claro que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1),$$

e da "simetria",

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n,$$

então

$$2\omega_n(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_n^2,$$

o que leva a

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\zeta} = Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Relação com ζ

Da definição,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 = 4\zeta\omega_n^2,$$

mas, é claro que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1),$$

e da "simetria",

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n,$$

então

$$2\omega_n(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_n^2,$$

o que leva a

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\zeta} = Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Resposta sob $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

Supondo que $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 e^{i\omega t},$$

se a solução particular é tomada como $x_p(t) = Xe^{i\omega t}$, com X complexo, temos

$$X = \frac{F_0}{(\kappa - m\omega^2) + ic\omega}.$$

Normalizando,

$$X = F_0 \left[\frac{\kappa - m\omega^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} - i\frac{c\omega}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \right]$$

Resposta sob $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

Supondo que $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 e^{i\omega t},$$

se a solução particular é tomada como $x_p(t) = Xe^{i\omega t}$, com X complexo, temos

$$X = \frac{F_0}{(\kappa - m\omega^2) + ic\omega}.$$

Normalizando,

$$X = F_0 \left[\frac{\kappa - m\omega^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} - i \frac{c\omega}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \right]$$

Resposta sob $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

Supondo que $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 e^{i\omega t},$$

se a solução particular é tomada como $x_p(t) = X e^{i\omega t}$, com X complexo, temos

$$X = \frac{F_0}{(\kappa - m\omega^2) + ic\omega}.$$

Normalizando,

$$X = F_0 \left[\frac{\kappa - m\omega^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} - i \frac{c\omega}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \right]$$

Forma Exponencial

Como $a + bi = Ae^{i\phi}$, onde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\phi = \arctan(b/a)$, temos

$$X = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

A solução permanente é então

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

Forma Exponencial

Como $a + bi = Ae^{i\phi}$, onde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\phi = \arctan(b/a)$, temos

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

A solução permanente é então

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

Forma Exponencial

Como $a + bi = Ae^{i\phi}$, onde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\phi = \arctan(b/a)$, temos

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

A solução permanente é então

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

Resposta Complexa em Frequência

Da amplitude complexa

$$\frac{\kappa X}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \equiv H(i\omega).$$

A magnitude de $H(i\omega)$ é

$$|H(i\omega)| = \left|\frac{\kappa X}{F_0}\right| = \frac{1}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

e é claro que

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right).$$

A solução particular pode ser escrita então como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}.$$

Resposta Complexa em Frequência

Da amplitude complexa

$$\frac{\kappa X}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \equiv H(i\omega).$$

A magnitude de $H(i\omega)$ é

$$|H(i\omega)| = \left|\frac{\kappa X}{F_0}\right| = \frac{1}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

e é claro que

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right).$$

A solução particular pode ser escrita então como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}.$$

Resposta Complexa em Frequência

Da amplitude complexa

$$\frac{\kappa X}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \equiv H(i\omega).$$

A magnitude de $H(i\omega)$ é

$$|H(i\omega)| = \left|\frac{\kappa X}{F_0}\right| = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

e é claro que

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right).$$

A solução particular pode ser escrita então como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}.$$

Resposta Complexa em Frequência

A resposta complexa em frequência contém tanto a amplitude quanto a fase da resposta.

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a solução particular é a parte *real*:

$$x_p(t) = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Se $F(t) = F_0 \sin \omega t$, a solução particular é a parte *imaginária*:

$$x_p(t) = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Resposta Complexa em Frequência

A resposta complexa em frequência contém tanto a amplitude quanto a fase da resposta.

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a solução particular é a parte *real*:

$$x_p(t) = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Se $F(t) = F_0 \sin \omega t$, a solução particular é a parte *imaginária*:

$$x_p(t) = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Resposta Complexa em Frequência

A resposta complexa em frequência contém tanto a amplitude quanto a fase da resposta.

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a solução particular é a parte *real*:

$$x_p(t) = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Se $F(t) = F_0 \sin \omega t$, a solução particular é a parte *imaginária*:

$$x_p(t) = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Representação Vetorial Complexa

Temos que:

$$\text{Deslocamento} = x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$\text{Velocidade} = \dot{x}_p(t) = i\omega\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega x_p(t)$$

$$\text{Aceleração} = \ddot{x}_p(t) = -\omega^2\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} = -\omega^2 x_p(t)$$

A velocidade precede o deslocamento em $\pi/2$ radianos, e a aceleração precede o deslocamento em π radianos.

Representação Vetorial Complexa

Temos que:

$$\text{Deslocamento} = x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)}$$

$$\text{Velocidade} = \dot{x}_p(t) = i\omega\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)} = i\omega x_p(t)$$

$$\text{Aceleração} = \ddot{x}_p(t) = -\omega^2\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)} = -\omega^2 x_p(t)$$

A velocidade precede o deslocamento em $\pi/2$ radianos, e a aceleração precede o deslocamento em π radianos.

Representação Vetorial Complexa

Temos que:

$$\text{Deslocamento} = x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)}$$

$$\text{Velocidade} = \dot{x}_p(t) = i\omega\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)} = i\omega x_p(t)$$

$$\text{Aceleração} = \ddot{x}_p(t) = -\omega^2\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)} = -\omega^2 x_p(t)$$

A velocidade precede o deslocamento em $\pi/2$ radianos, e a aceleração precede o deslocamento em π radianos.

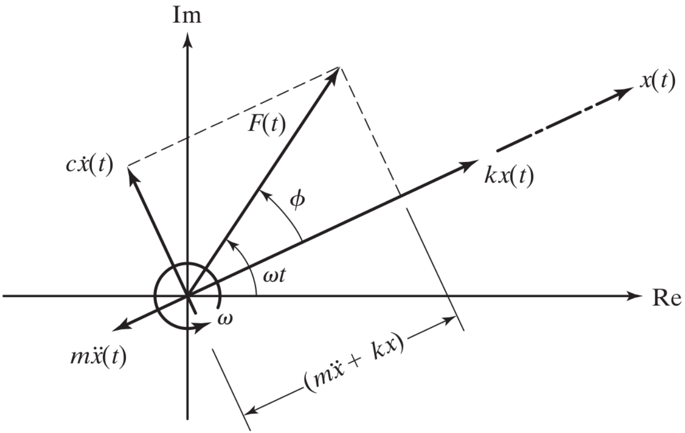
Representação Vetorial Complexa

Temos que:

$$\text{Deslocamento} = x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)}$$
$$\text{Velocidade} = \dot{x}_p(t) = i\omega\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)} = i\omega x_p(t)$$
$$\text{Aceleração} = \ddot{x}_p(t) = -\omega^2\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)} = -\omega^2 x_p(t)$$

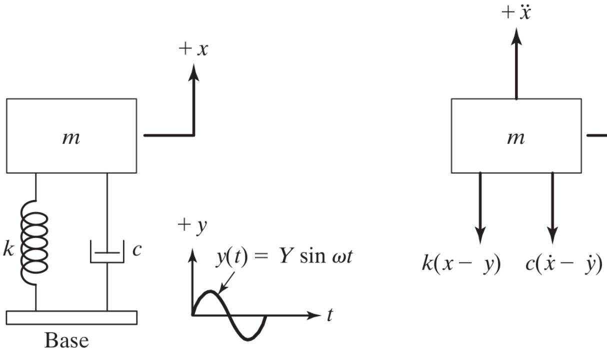
A velocidade precede o deslocamento em $\pi/2$ radianos, e a aceleração precede o deslocamento em π radianos.

Representação Gráfica



Movimento da Base

A excitação do sistema também pode ser feita por movimento da base.



Equação de Movimento

A equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0.$$

Supondo que $y(t) = Y \sin \omega t$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = c\dot{y} + \kappa x = c\omega Y \cos \omega t + \kappa Y \sin \omega t$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = A \sin(\omega t - \alpha),$$

onde $A = Y\sqrt{\kappa^2 + (c\omega)^2}$, e $\alpha = \arctan(-c\omega/\kappa)$.

Conclusão: o movimento base corresponde a aplicação de uma força de amplitude A, "atrasada" de um ângulo α.

Equação de Movimento

A equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0.$$

Supondo que $y(t) = Y \sin \omega t$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = c\dot{y} + \kappa x = c\omega Y \cos \omega t + \kappa Y \sin \omega t$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = A \sin(\omega t - \alpha),$$

onde $A = Y\sqrt{\kappa^2 + (c\omega)^2}$, e $\alpha = \arctan(-c\omega/\kappa)$.

Conclusão: o movimento base corresponde a aplicação de uma força de amplitude A, “atrasada” de um ângulo α.

Equação de Movimento

A equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0.$$

Supondo que $y(t) = Y \sin \omega t$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = c\dot{y} + \kappa x = c\omega Y \cos \omega t + \kappa Y \sin \omega t$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = A \sin(\omega t - \alpha),$$

onde $A = Y\sqrt{\kappa^2 + (c\omega)^2}$, e $\alpha = \arctan(-c\omega/\kappa)$.

Conclusão: o movimento base corresponde a aplicação de uma força de amplitude A, "atrasada" de um ângulo α.

Solução Particular

Para uma força harmônica $F(t) = F_0 \sin \omega t$,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1); \qquad \tan \phi_1 = \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}.$$

Se a força é atrasada de α, isto é, $F(t) = F_0 \sin(\omega t - \alpha)$, a resposta atrasa do mesmo valor!

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

No caso, $F_0 = Y\left(\kappa^2 + (c\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$x_p(t) = \frac{Y(\kappa^2 + (c\omega)^2)^{\frac{1}{2}}}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

Solução Particular

Para uma força harmônica $F(t) = F_0 \sin \omega t$,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1); \qquad \tan \phi_1 = \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}.$$

Se a força é atrasada de α, isto é, $F(t) = F_0 \sin(\omega t - \alpha)$, a resposta atrasa do mesmo valor!

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

No caso, $F_0 = Y\left(\kappa^2 + (c\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$x_p(t) = \frac{Y(\kappa^2 + (c\omega)^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

Solução Particular

Para uma força harmônica $F(t) = F_0 \sin \omega t$,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1); \qquad \tan \phi_1 = \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}.$$

Se a força é atrasada de α, isto é, $F(t) = F_0 \sin(\omega t - \alpha)$, a resposta atrasa do mesmo valor!

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

No caso, $F_0 = Y\left(\kappa^2 + (c\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$x_p(t) = \frac{Y(\kappa^2 + (c\omega)^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

Solução Particular

A solução particular é uma função harmônica,

$$x_p(t) = Y\left[\frac{\kappa^2 + (c\omega)^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha),$$

que pode ser escrita como

$$x_p(t) = X\sin(\omega_n t - \phi)$$

com

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{\kappa^2 + (c\omega)^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{e} \qquad \phi = \phi_1 + \alpha.$$

Transmissibilidade de Deslocamento e Ângulo de Fase

A transmissibilidade de deslocamento X/Y pode ser reescrita como

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{\kappa^2 + (c\omega)^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

O ângulo de fase ϕ é dado por

$$\tan\phi = \tan(\phi_1 + \alpha) = \frac{\tan\phi_1 + \tan\alpha}{1 - \tan\phi_1 \tan\alpha} = \frac{\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2} + \frac{-c\omega}{\kappa}}{1 - \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\frac{-c\omega}{\kappa}},$$

o que pode ser simplificado para

$$\phi = \arctan\left(\frac{mc\omega^3}{\kappa(\kappa - m\omega^2) + (c\omega)^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}\right).$$

Transmissibilidade de Deslocamento e Ângulo de Fase

A transmissibilidade de deslocamento X/Y pode ser reescrita como

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{\kappa^2 + (c\omega)^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

O ângulo de fase ϕ é dado por

$$\tan\phi = \tan(\phi_1 + \alpha) = \frac{\tan\phi_1 + \tan\alpha}{1 - \tan\phi_1 \tan\alpha} = \frac{\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2} + \frac{-c\omega}{\kappa}}{1 - \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\frac{-c\omega}{\kappa}},$$

o que pode ser simplificado para

$$\phi = \arctan\left(\frac{mc\omega^3}{\kappa(\kappa - m\omega^2) + (c\omega)^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}\right).$$

Transmissibilidade de Deslocamento e Ângulo de Fase

A transmissibilidade de deslocamento X/Y pode ser reescrita como

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{\kappa^2 + (c\omega)^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

O ângulo de fase ϕ é dado por

$$\tan\phi = \tan(\phi_1 + \alpha) = \frac{\tan\phi_1 + \tan\alpha}{1 - \tan\phi_1 \tan\alpha} = \frac{\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2} + \frac{-c\omega}{\kappa}}{1 - \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\frac{-c\omega}{\kappa}},$$

o que pode ser simplificado para

$$\phi = \arctan\left(\frac{mc\omega^3}{\kappa(\kappa - m\omega^2) + (c\omega)^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}\right).$$

Forma Complexa

Repetindo a análise com $y(t) = \Re(Ye^{i\omega t})$, a resposta do sistema é

$$x_p(t) = \Re\left(\frac{1 + i2\zeta r}{1 - r^2 + i2\zeta r} Ye^{i\omega t}\right),$$

e a transmissibilidade de deslocamento na forma complexa é

$$\frac{X}{Y} = T_d = \left[1 + (2\zeta r)^2\right]^{\frac{1}{2}} |H(i\omega)|,$$

onde

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Forma Complexa

Repetindo a análise com $y(t) = \Re(Ye^{i\omega t})$, a resposta do sistema é

$$x_p(t) = \Re\left(\frac{1 + i2\zeta r}{1 - r^2 + i2\zeta r} Ye^{i\omega t}\right),$$

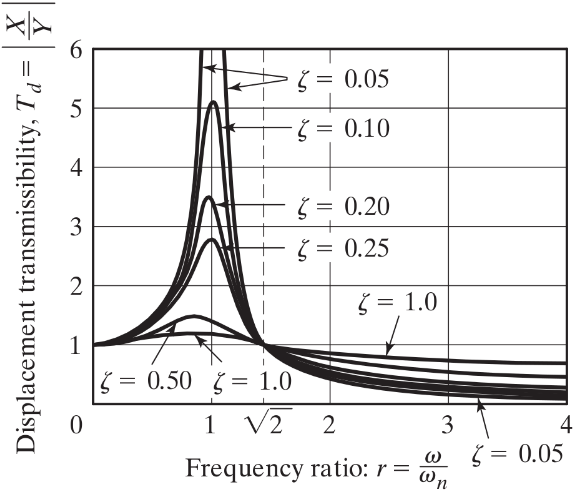
e a transmissibilidade de deslocamento na forma complexa é

$$\frac{X}{Y} = T_d = \left[1 + (2\zeta r)^2\right]^{\frac{1}{2}} |H(i\omega)|,$$

onde

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Transmissibilidade

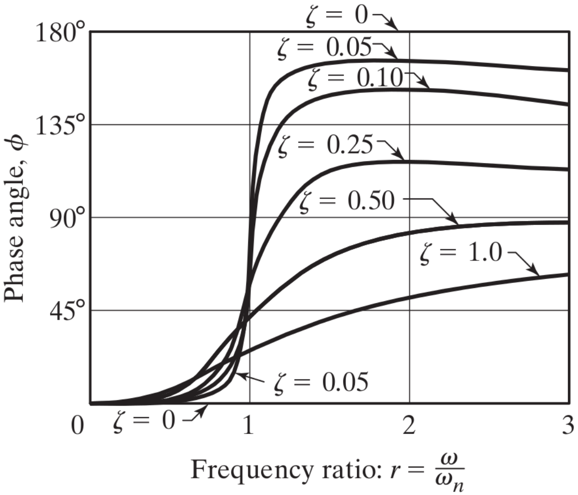


Transmissibilidade – Características

- $T_d \to 1$ quando $r \to 0$;
- Para $\zeta = 0$, $T_d \to \infty$ para $r = 1$;
- Para $r > \sqrt{2}$, $T_d < 1$, para qualquer ζ;
- $T_d = 1$ para $r = \sqrt{2}$, para qualquer ζ;
- Para $r < \sqrt{2}$, aumentar o amortecimendo *diminui* T_d;
- Para $r > \sqrt{2}$, aumentar o amortecimendo *aumenta* T_d;
- Para sistemas subamortecidos, T_d é máximo para

$$r_m = \frac{1}{2\zeta}\left[\sqrt{1+8\zeta^2}-1\right]^{\frac{1}{2}} < 1$$

Ângulo de Fase



Força Transmitida

A força transmitida à base é

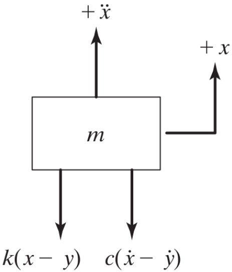
$$F = \kappa(x - y) + x(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x},$$

mas como $x(t) = X\sin(\omega_n t - \phi)$,

$$F = m\omega^2 X\sin(\omega_n t - \phi) = F_T\sin(\omega_n t - \phi),$$

com

$$F_T = m\omega^2 X.$$



Força Transmitida

A força transmitida à base é

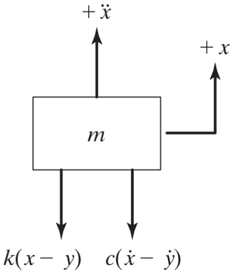
$$F = \kappa(x - y) + x(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x},$$

mas como $x(t) = X\sin(\omega_n t - \phi)$,

$$F = m\omega^2 X \sin(\omega_n t - \phi) = F_T \sin(\omega_n t - \phi),$$

com

$$F_T = m\omega^2 X.$$



Transmissilidade de Força

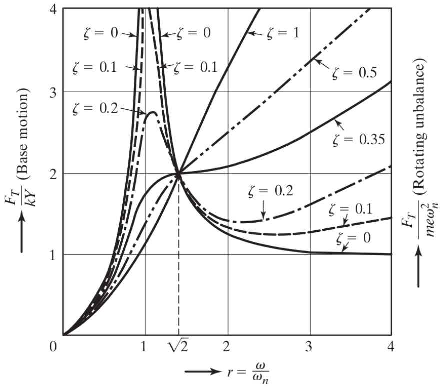
Como $F_T = m\omega^2 X$, temos

$$F_T = m\omega^2 Y \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]$$

ou

$$\frac{F_T}{\kappa Y} = r^2 \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

OBS: Em fase com o deslocamento da massa!



Transmissilidade de Força

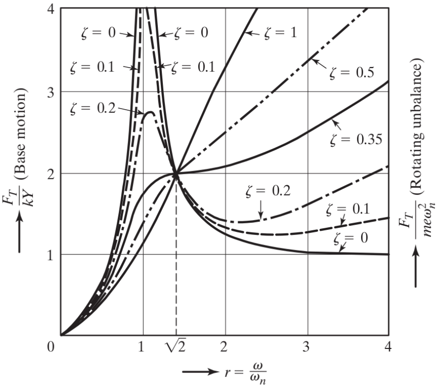
Como $F_T = m\omega^2 X$, temos

$$F_T = m\omega^2 Y \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]$$

ou

$$\frac{F_T}{\kappa Y} = r^2 \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

OBS: Em fase com o deslocamento da massa!



Movimento Relativo

A eq. de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

definindo $z = x - y$ como o movimento relativo à base, então $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$, e eq. de movimento torna-se

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega_n t.$$

Claramente, uma equação de movimento em z, para força harmônica, onde $F_0 = m\omega^2 Y$.

A solução é

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega_n t.$$

A resposta é

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1) = Z \sin(\omega t - \phi_1)$$

Movimento Relativo

A eq. de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

definindo $z = x - y$ como o movimento relativo à base, então $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$, e eq. de movimento torna-se

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega_n t.$$

Claramente, uma equação de movimento em z, para força harmônica, onde $F_0 = m\omega^2 Y$.

A solução é

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega_n t.$$

A resposta é

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1) = Z \sin(\omega t - \phi_1)$$

Movimento Relativo

A eq. de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

definindo $z = x - y$ como o movimento relativo à base, então $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$, e eq. de movimento torna-se

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega_n t.$$

Claramente, uma equação de movimento em z, para força harmônica, onde $F_0 = m\omega^2 Y$.
A solução é

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega_n t.$$

A resposta é

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1) = Z \sin(\omega t - \phi_1)$$

Movimento Relativo

A eq. de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

definindo $z = x - y$ como o movimento relativo à base, então $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$, e eq. de movimento torna-se

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega_n t.$$

Claramente, uma equação de movimento em z, para força harmônica, onde $F_0 = m\omega^2 Y$.
A solução é

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega_n t.$$

A resposta é

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1) = Z \sin(\omega t - \phi_1)$$

Movimento Relativo

A amplitude do movimento relativo é

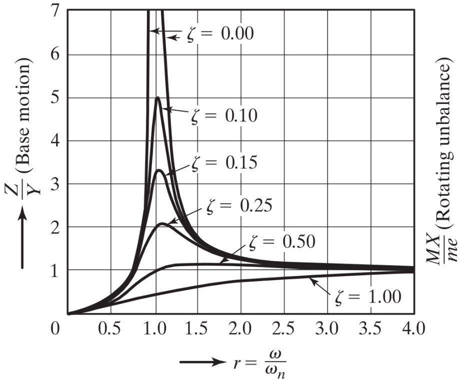
$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}},$$

ou

$$Z = Y \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},$$

e ϕ_1 é dado por

$$\tan \phi_1 = \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2} = \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$



Movimento Relativo

A amplitude do movimento relativo é

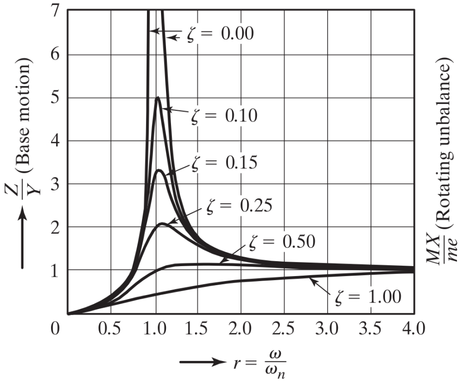
$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}},$$

ou

$$Z = Y \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},$$

e ϕ_1 é dado por

$$\tan \phi_1 = \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2} = \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$



Modelo Físico

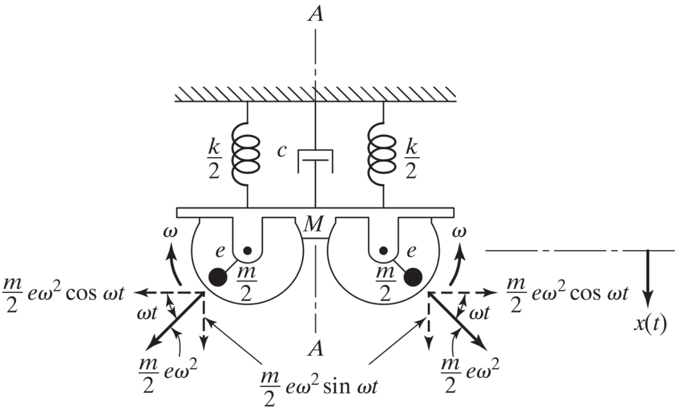
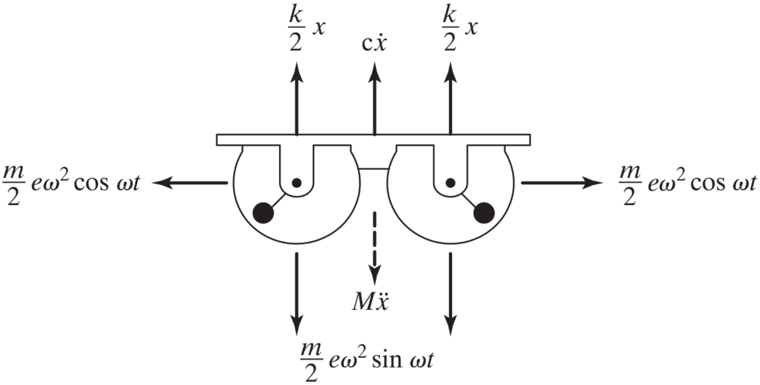


Diagrama de Forças



A força de excitação é $F(t) = me\omega^2 \sin \omega t$.

Equação de Movimento

A equação de movimento é

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = me\omega^2 \sin \omega t,$$

que é idêntica a de um sistema submetida a uma força harmônica de magnitude $F_0 = me\omega^2$ e frequência ω.

A solução particular é, claramente:

$$\begin{aligned} x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) &= \Im\left[\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)}\right] \\ &= \Im\left[\frac{me\omega^2}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)}\right] \\ &= \Im\left[\frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)}\right] \end{aligned}$$

Equação de Movimento

A equação de movimento é

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = me\omega^2 \sin \omega t,$$

que é idêntica a de um sistema submetida a uma força harmônica de magnitude $F_0 = me\omega^2$ e frequência ω.

A solução particular é, claramente:

$$\begin{aligned} x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) &= \Im\left[\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)}\right] \\ &= \Im\left[\frac{me\omega^2}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)}\right] \\ &= \Im\left[\frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)}\right] \end{aligned}$$

Continuando...

$$x_p(t) = X\sin(\omega t - \phi) = \Im\left[\frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right],$$

onde,

$$X = \frac{me\omega^2}{[(\kappa - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}$$

e

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - M\omega^2}\right).$$

Fazendo $\zeta = c/c_c$ e $c_c = 2M\omega_n$, ficamos com

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}} = r^2|H(i\omega)| \quad \text{e} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right).$$

Continuando...

$$x_p(t) = X\sin(\omega t - \phi) = \Im\left[\frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}\right],$$

onde,

$$X = \frac{me\omega^2}{[(\kappa - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}$$

e

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - M\omega^2}\right).$$

Fazendo $\zeta = c/c_c$ e $c_c = 2M\omega_n$, ficamos com

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}} = r^2|H(i\omega)| \quad \text{e} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right).$$

Características

- Todas as curvas começam em 0.
- A amplitude próxima à ressonância é muito sensível ao amortecimento.
- Para $\omega \gg \omega_n$, $MX/me \to 1$, e o amortecimento tem pouco efeito.
- Para $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$, o ponto onde ocorre e o máximo de MX/me são

$$r_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} > 1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{MX}{me}\right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}};$$

- Para $\zeta > 1/\sqrt{2}$, não há um máximo local, MX/me cresce monotonamente de 0 em $r = 0$ para 1 com $r \to \infty$;

Transmissibildade de Forças

A força transmitida para a base pelo desbalanceamento rotativo é dada por

$$F(t) = \kappa x(t) + c\dot{x}(t),$$

que pode ser calculada como

$$|F| = me\omega^2 \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$