Vibrações Mecânicas

Vibração Livre – Sistemas com 1 GL
Sistemas Não Amortecidos

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

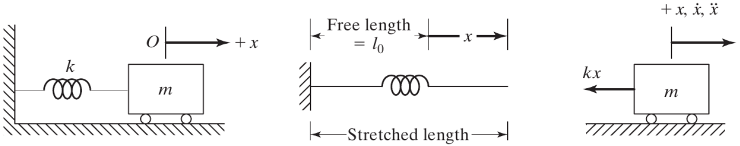
2015.1

Modelo 1 GL – Vibração Livre Não Amortecida

- Uma única coordenada generalizada é suficiente para descrever a configuração do sistema;
- Não há ação de forças externas;
- Não há dissipação de energia mecânica, energia total permanece constante;
- A amplitude de movimento é portanto constante ao longo do tempo;

Modelo 1 GL

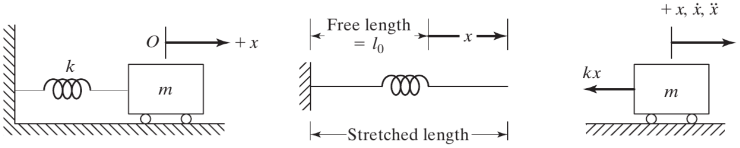
Modelo representativo de todos os sistemas com 1 GL.



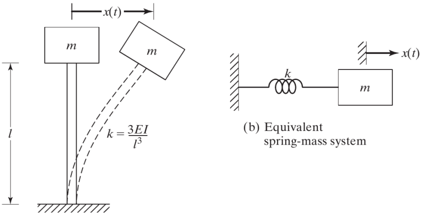
(a) (b) (c)

Modelo 1 GL

Modelo representativo de todos os sistemas com 1 GL.



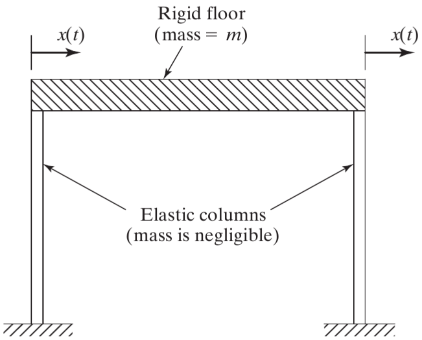
(a) (b) (c)



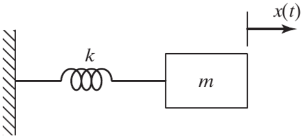
(a) Idealization of the tall structure

(b) Equivalent spring-mass system

Modelo 1 GL



(a) Building frame



(b) Equivalent spring-mass system

Modelo 1 GL

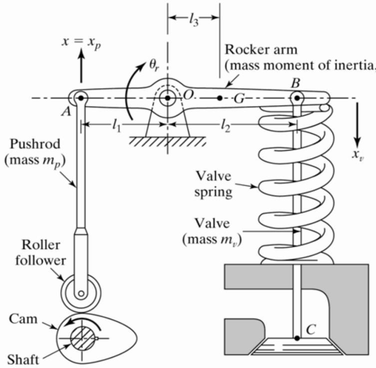


Figure 1.32

Cam-follower system.

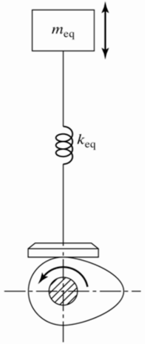
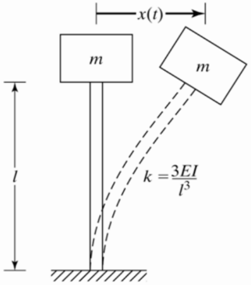


Figure 2.2

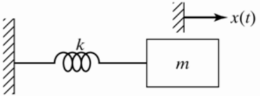
Equivalent spring-mass system for the camfollower system of Fig. 1.32.

Modelo 1 GL

Figure 2.3
The space needle (structure).



(a) Idealization of the tall structure



(b) Equivalent spring-mass system

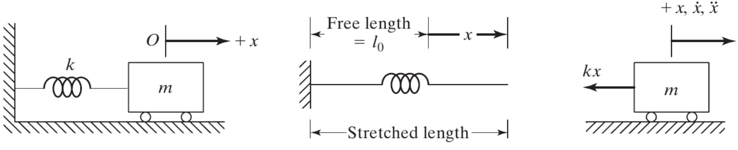
Equação de Movimento

Aplicação da segunda lei de Newton:

- Escolher a coordenada generalizada que descreve o sistema;
- Determinar a configuração de equilíbrio estático do sistema, tomar esta posição como origem da coordenada generalizada;
- Desenhar um DCL para a massa quando o sistema tem um deslocamento e velocidades positivas;
- Aplicar a segunda lei de Newton;

Equação de Movimento

Usando a 2ª Lei de Newton



(a) (b) (c)

$$-\kappa x = m\ddot{x},$$

ou

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Equação de Movimento

Usando o princípio de D'Alembert

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ou

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$$

ou

$$\sum \vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0}$$

No caso,

$$-\kappa x - m\ddot{x} = 0$$

ou

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0$$

Equação de Movimento

Usando o princípio de D'Alembert

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ou

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$$

ou

$$\sum \vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0}$$

No caso,

$$-\kappa x - m\ddot{x} = 0$$

ou

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais

Princípio dos Trabalhos Virtuais

Se um sistema que está em equilíbrio sob à ação de um conjunto de forças é submetido a um deslocamento virtual, o trabalho virtual total realizado por estas forças é nulo.

Deslocamento Virtual

Um deslocamento virtual é um deslocamento infinitesimal, imaginário, compatível com as restrições cinemáticas do problema.

Princípio dos Trabalhos Virtuais

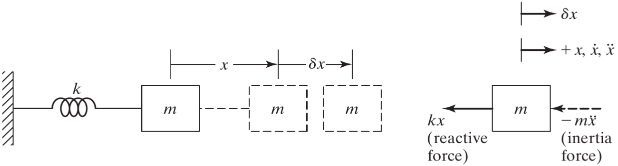
Princípio dos Trabalhos Virtuais

Se um sistema que está em equilíbrio sob à ação de um conjunto de forças é submetido a um deslocamento virtual, o trabalho virtual total realizado por estas forças é nulo.

Deslocamento Virtual

Um deslocamento virtual é um deslocamento infinitesimal, imaginário, compatível com as restrições cinemáticas do problema.

Princípio dos Trabalhos Virtuais



(a) Mass under a displacement x

(b) Free-body diagram

Trabalho virtual da força da mola: $\delta W_s = -\kappa x \delta x$

Trabalho virtual da força de inércia: $\delta W_i = -m\ddot{x}\delta x$

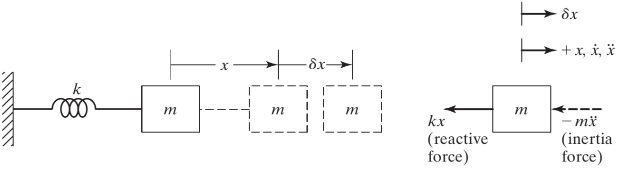
Igualando o trabalho virtual total a zero, temos

$$-\kappa x \delta x - m\ddot{x}\delta x = 0$$

o que leva a

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais



(a) Mass under a displacement x

(b) Free-body diagram

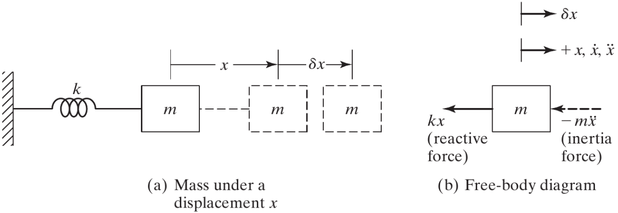
Trabalho virtual da força da mola: $\delta W_s = -\kappa x \delta x$
Trabalho virtual da força de inércia: $\delta W_i = -m\ddot{x}\delta x$
Igualando o trabalho virtual total a zero, temos

$$-\kappa x \delta x - m\ddot{x}\delta x = 0$$

o que leva a

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais



Trabalho virtual da força da mola: $\delta W_s = -\kappa x \delta x$
Trabalho virtual da força de inércia: $\delta W_i = -m\ddot{x}\delta x$
Igualando o trabalho virtual total a zero, temos

$$-\kappa x \delta x - m\ddot{x}\delta x = 0$$

o que leva a

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Conservação de Energia

Usando a conservação da energia mecânica

$$T + U = \mathrm{cte},$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

mas,

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{2}\kappa x^2$$

portanto,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Conservação de Energia

Usando a conservação da energia mecânica

$$T + U = \mathrm{cte},$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

mas,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{2}\kappa x^2$$

portanto,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Conservação de Energia

Usando a conservação da energia mecânica

$$T + U = \mathrm{cte},$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

mas,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{2} \kappa x^2$$

portanto,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Conservação de Energia

Usando a conservação da energia mecânica

$$T + U = \mathrm{cte},$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

mas,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{2}\kappa x^2$$

portanto,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Sistemas Rotativos

Quando a inércia é rotacional, a segunda lei de Newton é

$$\sum \vec{M} = J\ddot{\vec{\theta}}$$

A equação de movimento, em termos do ângulo de rotação a partir de um eixo tomado como origem, é

$$J\ddot{\theta} + \kappa_t \theta = 0$$

Sistemas Rotativos

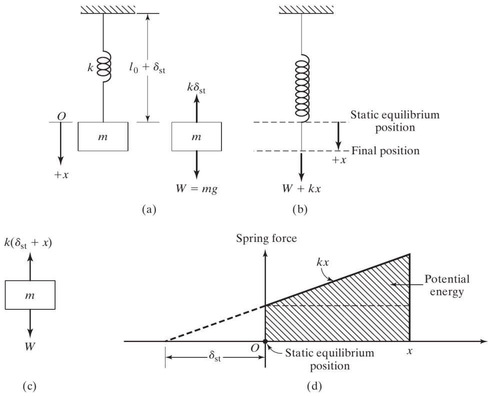
Quando a inércia é rotacional, a segunda lei de Newton é

$$\sum \vec{M} = J\ddot{\vec{\theta}}$$

A equação de movimento, em termos do ângulo de rotação a partir de um eixo tomado como origem, é

$$J\ddot{\theta} + \kappa_t \theta = 0$$

Efeito do Peso



O peso é

$$W = mg = \kappa\delta_{st}.$$

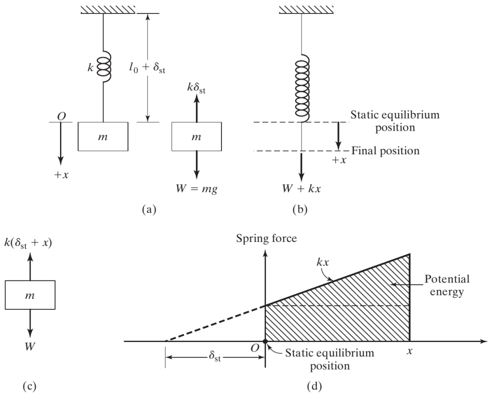
Para um deslocamento x, a partir da posição de equilíbrio,

$$m\ddot{x} = -\kappa(x + \delta_{st}) + W.$$

Como $W = \kappa\delta_{st}$,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0$$

Efeito do Peso



O peso é

$$W = mg = \kappa\delta_{\rm st}.$$

Para um deslocamento x, a partir da posição de equilíbrio,

$$m\ddot{x} = -\kappa(x+\delta_{\rm st})+W.$$

Como $W = \kappa\delta_{\rm st}$,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0$$

Solução de $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

Supondo que a solução seja da forma:

$$x(t) = Ce^{st},$$

temos

$$C(ms^2 + \kappa)e^{st} = 0.$$

Assim,

$$ms^2 + \kappa = 0,$$

o que leva a

$$s = \pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm i\omega_n.$$

onde

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Solução de $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

Supondo que a solução seja da forma:

$$x(t) = Ce^{st},$$

temos

$$C(ms^2 + \kappa)e^{st} = 0.$$

Assim,

$$ms^2 + \kappa = 0,$$

o que leva a

$$s = \pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm i\omega_n.$$

onde

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Solução de $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

Supondo que a solução seja da forma:

$$x(t) = Ce^{st},$$

temos

$$C(ms^2 + \kappa)e^{st} = 0.$$

Assim,

$$ms^2 + \kappa = 0,$$

o que leva a

$$s = \pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm i\omega_n.$$

onde

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Solução de $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

A equação

$$ms^2 + \kappa = 0$$

é a equação característica da equação diferencial de movimento.

As raízes desta equação,

$$s_1 = i\omega_n, \quad s_2 = -i\omega_n, \quad \text{com} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

são os autovalores ou valores característicos do problema.

Solução de $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

A equação

$$ms^2 + \kappa = 0$$

é a equação característica da equação diferencial de movimento.

As raízes desta equação,

$$s_1 = i\omega_n, \quad s_2 = -i\omega_n, \quad \text{com} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

são os autovalores ou valores característicos do problema.

Solução Geral

As duas raízes satisfazem a equação, portanto a solução geral é:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}.$$

onde C_1 e C_2 são constantes complexas (e conjugadas)!
Reescrevendo,

$$x(t) = (a + bi)e^{i\omega_n t} + (a - bi)e^{-i\omega_n t}.$$

Como a equação é de 2^a ordem, temos duas constantes a determinar a partir das condições iniciais.

Solução Geral

As duas raízes satisfazem a equação, portanto a solução geral é:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}.$$

onde C_1 e C_2 são constantes complexas (e conjugadas)!
Reescrevendo,

$$x(t) = (a + bi)e^{i\omega_n t} + (a - bi)e^{-i\omega_n t}.$$

Como a equação é de 2ª ordem, temos duas constantes a determinar a partir das condições iniciais.

Desenvolvendo

Lembrando que

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm i\sin\omega_n t$$

A solução geral torna-se

$$x(t) = (a+bi)(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t) + (a-bi)(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t),$$

que pode ser reescrito para

$$x(t) = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t,$$

com

$$A_1 = 2a, \qquad A_2 = -2b.$$

A_1 e A_2 são as constantes a determinar.

Desenvolvendo

Lembrando que

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm i \sin\omega_n t$$

A solução geral torna-se

$$x(t) = (a + bi)(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t) + (a - bi)(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t),$$

que pode ser reescrito para

$$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t,$$

com

$$A_1 = 2a, \qquad A_2 = -2b.$$

A_1 e A_2 são as constantes a determinar.

Desenvolvendo

Lembrando que

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm i \sin\omega_n t$$

A solução geral torna-se

$$x(t) = (a+bi)(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t) + (a-bi)(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t),$$

que pode ser reescrito para

$$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t,$$

com

$$A_1 = 2a, \qquad A_2 = -2b.$$

A_1 e A_2 são as constantes a determinar.

Condições Iniciais

As constantes A_1 e A_2 devem ser determinadas a partir das condições iniciais do problema.
Para $t = 0$,

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Inserindo em

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t,$$

e

$$\dot{x}(t) = -A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t,$$

temos

$$A_1 = x_0, \qquad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}.$$

Condições Iniciais

As constantes A_1 e A_2 devem ser determinadas a partir das condições iniciais do problema.
Para $t = 0$,

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Inserindo em

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t,$$

e

$$\dot{x}(t) = -A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t,$$

temos

$$A_1 = x_0, \qquad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}.$$

Condições Iniciais

As constantes A_1 e A_2 devem ser determinadas a partir das condições iniciais do problema.
Para $t = 0$,

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Inserindo em

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t,$$

e

$$\dot{x}(t) = -A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t,$$

temos

$$A_1 = x_0, \qquad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}.$$

Solução para Vibração Livre Não Amortecida

A solução é então

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

para todo e qualquer sistema linear não amortecido com 1 GL, agora e para todo o sempre.

Se o sistema for rotativo,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J}}.$$

Solução para Vibração Livre Não Amortecida

A solução é então

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

para todo e qualquer sistema linear não amortecido com 1 GL, agora e para todo o sempre.

Se o sistema for rotativo,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J}}.$$

Solução para Vibração Livre Não Amortecida

O deslocamento (generalizado) da massa (generalizada),

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

é claramente dado pela soma de duas funções harmônicas de mesma frequência.
É portanto também uma função harmônica, com frequência angular

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

que é denominada frequência natural do sistema.
Este sistema é chamado de oscilador harmônico.

Forma Alternativa

Conforme vimos anteriormente, fazendo

$$A_1 = A\cos\phi, \qquad A_2 = A\sin\phi,$$

escrevemos a soma das duas harmônicas como

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi),$$

com a amplitude

$$A = (A_1 + A_2)^{\frac{1}{2}} = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

e ângulo de fase

$$\phi = \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n}\right).$$

Outra Alternativa

Fazendo

$$A_1 = A_0 \sin \phi_0, \qquad A_2 = A_0 \cos \phi_0,$$

escrevemos a soma das duas harmônicas como

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_n t + \phi_0),$$

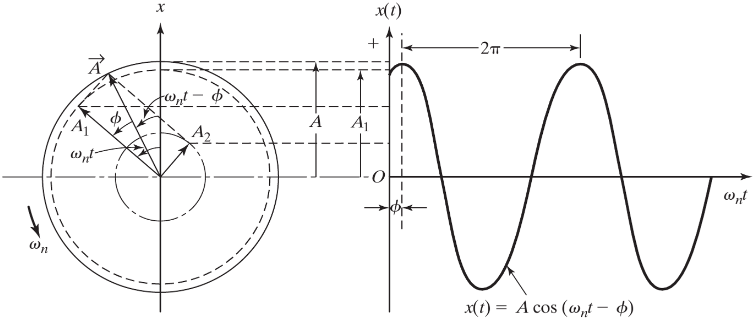
com a amplitude

$$A_0 = A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

e ângulo de fase

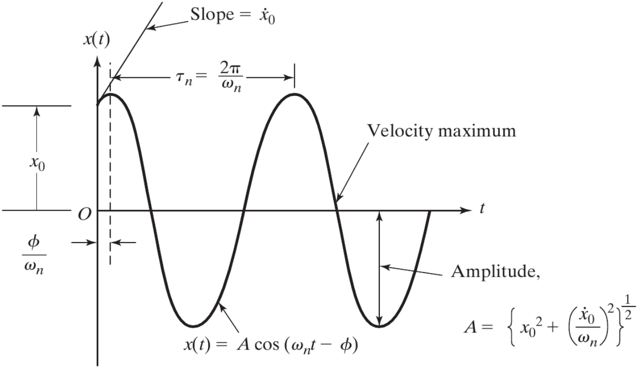
$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \arctan\left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0}\right).$$

Interpretação Gráfica



(a) (b)

Interpretação Gráfica



Aspectos Interessantes

Para um sistema massa mola vertical,

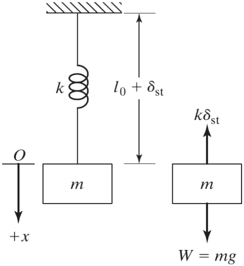
$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

mas,

$$\kappa = \frac{W}{\delta_{\mathrm{st}}} = \frac{mg}{\delta_{\mathrm{st}}},$$

assim

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\mathrm{st}}}}$$



A frequência e o período naturais são

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{g}{\delta_{\mathrm{st}}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \tau_n = \frac{1}{f_n} = 2\pi\left(\frac{\delta_{\mathrm{st}}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aspectos Interessantes

O deslocamento é

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi),$$

então a velocidade é

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A \sin(\omega_n t - \phi) = \omega_n A \cos\left(\omega_n t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

e a aceleração

$$\ddot{x}(t) = \omega_n^2 A\cos(\omega_n t - \phi) = \omega_n^2 A\cos\left(\omega_n t - \phi + \pi\right)$$

O que não deveria ser nenhuma supresa já que o deslocamento é harmônico.

Aspectos Interessantes

Como

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

se o deslocamento inicial é nulo, $x_0 = 0$,

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \cos \left(\omega_n t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

e se a velocidade inicial é nula, $\dot{x}_0 = 0$,

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t.$$

Plano de fase

Temos que

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi), \quad \text{ou} \quad \cos(\omega_n t - \phi) = \frac{x}{A},$$

e

$$\dot{x}(t) = -A\omega_n \sin(\omega_n t - \phi), \quad \text{ou} \quad \sin(\omega_n t - \phi) = -\frac{\dot{x}}{A\omega_n} = -\frac{y}{A}.$$

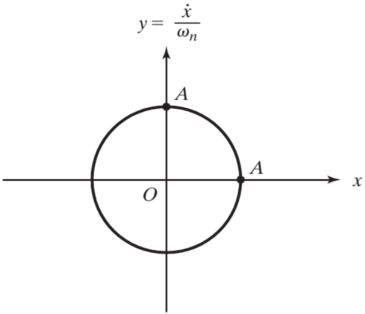
Elevando ao quadrado e somando

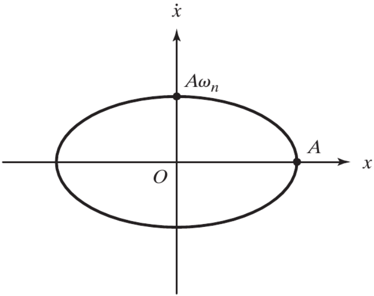
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1,$$

que é obviamente a equação de um círculo de raio A.

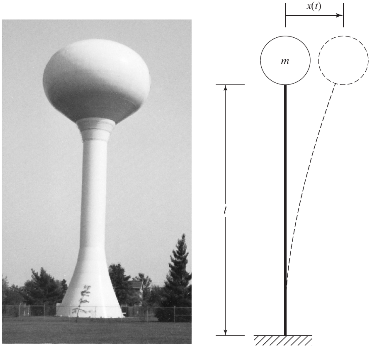
Plano de fase

Graficamente





Tanque de Armazenamento



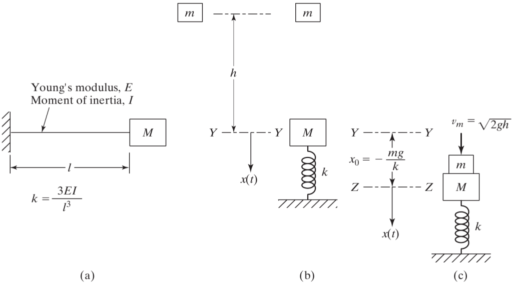
(a) (b)

Uma torre de água com 100m de altura é feita de concreto reforçado, com uma seção transversal circular, com diâmetro externo igual a 3,3 m e diâmetro interno igual a 2,70 m. A massa do tanque quando cheio é igual a 300.000 kg. Desprezando a massa da coluna e supondo que o módulo de elasticidade do concreto seja 30 GPa, determine:

Tanque de Armazenamento

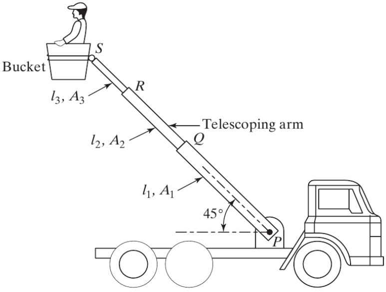
- a frequência e o período naturais do tanque;
- a resposta vibratória do tanque devida a um deslocamento lateral inicial de 250 mm;
- os valores máximos de aceleração e velocidade do tanque, neste caso.

Vibração devida a um impacto

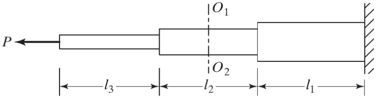


Uma viga em balanço carrega uma massa M em sua extremidade livre. Uma massa m cai de uma altura h sobre a massa M e fica permanentemente aderida a ela. Determine a vibração transversal resultante

Frequência Natural de Cabine



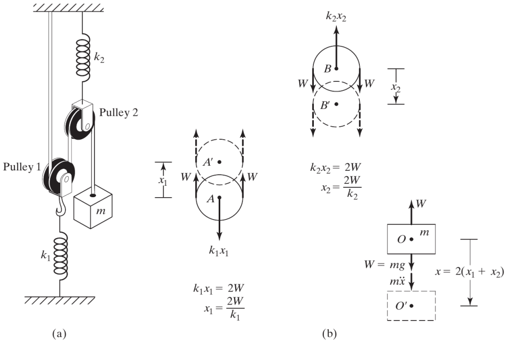
(a)



(b)

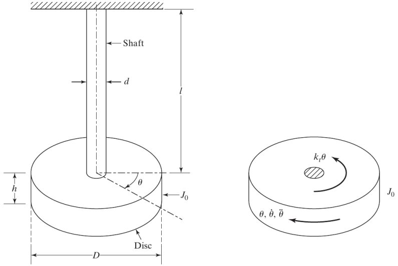
A cabine suspensa de um caminhão de combate a incêndios fica na extremidade de um braço telescópico, e o peso da cabine, considerando também o bombeiro, é de 2kN. Encontre a frequência natural de vibração da cabine na direção vertical.

Frequência Natural de Sistema de Polias



Determine a frequência natural do sistema mostrado, supondo que as polias tenham massa desprezível e que não haja atrito.

Modelo



Da mecânica dos sólidos,

$$M_t = \frac{GI_0}{l}\theta.$$

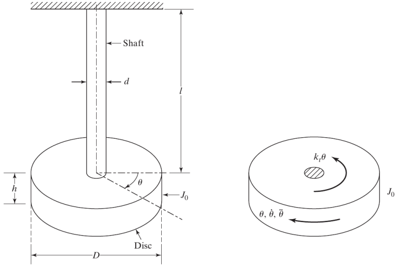
O momento polar de inércia é

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

e a rigidez em torção é portanto

$$\kappa_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l} = \frac{\pi G d^4}{32 l}$$

Modelo



Da mecânica dos sólidos,

$$M_t = \frac{GI_0}{l}\theta.$$

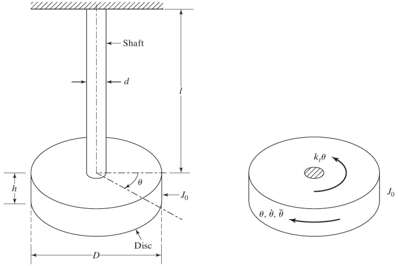
O momento polar de inércia é

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

e a rigidez em torção é portanto

$$\kappa_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l} = \frac{\pi G d^4}{32 l}$$

Modelo



Da mecânica dos sólidos,

$$M_t = \frac{GI_0}{l}\theta.$$

O momento polar de inércia é

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

e a rigidez em torção é portanto

$$\kappa_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l} = \frac{\pi G d^4}{32 l}$$

Equação de Movimento

Repetindo o procedimento usado para sistemas translacionais, a equação de movimento é

$$J_0\ddot{\theta} + \kappa_t\theta = 0.$$

Por analogia,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}$$

e a frequência e o período naturais são

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}, \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{\kappa_t}}.$$

Equação de Movimento

Repetindo o procedimento usado para sistemas translacionais, a equação de movimento é

$$J_0\ddot{\theta} + \kappa_t\theta = 0.$$

Por analogia,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}$$

e a frequência e o período naturais são

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}, \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{\kappa_t}}.$$

Equação de Movimento

Repetindo o procedimento usado para sistemas translacionais, a equação de movimento é

$$J_0\ddot{\theta} + \kappa_t\theta = 0.$$

Por analogia,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}$$

e a frequência e o período naturais são

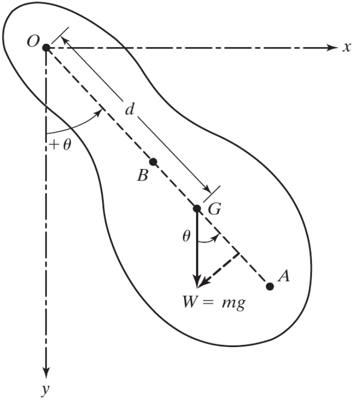
$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}, \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{\kappa_t}}.$$

Observações

- Eixos de seção não circular devem ter seu momentos polares considerados corretametne!
- Para um disco circular com diâmetro D, altura h, e densidade mássica ρ,

$$J_0 = \frac{\rho h \pi D^4}{32} = \frac{mD^2}{8}.$$

Pêndulo Composto



Um corpo rígido suspenso por um ponto que não é o seu centro de gravidade oscila em torno deste ponto sob ação da gravidade. Isto é conhecido como um pêndulo composto.

Equação de Movimento

Para um deslocamento angular θ,

$$J_0\ddot{\theta} + Wd\sin\theta = 0.$$

Para θ pequeno,

$$J_0\ddot{\theta} + Wd\theta = 0,$$

e a frequência natural é então

$$\omega_n = \left(\frac{Wd}{J_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{mgd}{J_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para um pêndulo simples, $\omega_n = (g/l)^{\frac{1}{2}}$, e o comprimento equivalente do pêndulo é então

$$l = \frac{J_0}{md}.$$

Equação de Movimento

Para um deslocamento angular θ,

$$J_0\ddot{\theta} + Wd\sin\theta = 0.$$

Para θ pequeno,

$$J_0\ddot{\theta} + Wd\theta = 0,$$

e a frequência natural é então

$$\omega_n = \left(\frac{Wd}{J_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{mgd}{J_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para um pêndulo simples,$\omega_n = (g/l)^{\frac{1}{2}}$, e o comprimento equivalente do pêndulo é então

$$l = \frac{J_0}{md}.$$

Equação de Movimento

Para um deslocamento angular θ,

$$J_0\ddot{\theta} + Wd\sin\theta = 0.$$

Para θ pequeno,

$$J_0\ddot{\theta} + Wd\theta = 0,$$

e a frequência natural é então

$$\omega_n = \left(\frac{Wd}{J_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{mgd}{J_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para um pêndulo simples, $\omega_n = (g/l)^{\frac{1}{2}}$, e o comprimento equivalente do pêndulo é então

$$l = \frac{J_0}{md}.$$

Equação de Movimento

Para um deslocamento angular θ,

$$J_0\ddot{\theta} + Wd\sin\theta = 0.$$

Para θ pequeno,

$$J_0\ddot{\theta} + Wd\theta = 0,$$

e a frequência natural é então

$$\omega_n = \left(\frac{Wd}{J_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{mgd}{J_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para um pêndulo simples,$\omega_n = (g/l)^{\frac{1}{2}}$, e o comprimento equivalente do pêndulo é então

$$l = \frac{J_0}{md}.$$

Comprimento Equivalente

Introduzindo o raio de giração k_O, tal que $J_0 = mk_O^2$,

$$\omega_n = \left(\frac{gd}{k_O^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad l = \frac{k_O^2}{d}.$$

Pelo teorema dos eixos paralelos,

$$k_O^2 = k_G^2 + d^2,$$

e o comprimento equivalente torna-se

$$l = \frac{k_G^2}{d} + d.$$

Comprimento Equivalente

Introduzindo o raio de giração k_O, tal que $J_0 = mk_O^2$,

$$\omega_n = \left(\frac{gd}{k_O^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad l = \frac{k_O^2}{d}.$$

Pelo teorema dos eixos paralelos,

$$k_O^2 = k_G^2 + d^2,$$

e o comprimento equivalente torna-se

$$l = \frac{k_G^2}{d} + d.$$

Comprimento Equivalente

Introduzindo o raio de giração k_O, tal que $J_0 = mk_O^2$,

$$\omega_n = \left(\frac{gd}{k_O^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad l = \frac{k_O^2}{d}.$$

Pelo teorema dos eixos paralelos,

$$k_O^2 = k_G^2 + d^2,$$

e o comprimento equivalente torna-se

$$l = \frac{k_G^2}{d} + d.$$

Centro de Percussão

Estendendo a linha de centro OG até o ponto A, tal que

$$GA = \frac{k_G^2}{d},$$

o comprimento equivalente fica então

$$l = GA + d = OA.$$

A frequência natural pode ser escrita como

$$\omega_n = \left(\frac{g}{k_O^2/d}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g}{OA}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

O que mostra que a frequência natural é a mesma estando o corpo suspenso por A ou 0.

Centro de Percussão

Estendendo a linha de centro OG até o ponto A, tal que

$$GA = \frac{k_G^2}{d},$$

o comprimento equivalente fica então

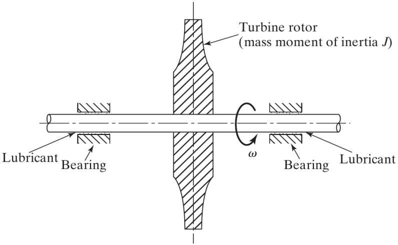
$$l = GA + d = OA.$$

A frequência natural pode ser escrita como

$$\omega_n = \left(\frac{g}{k_O^2/d}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g}{OA}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

O que mostra que a frequência natural é a mesma estando o corpo suspenso por A ou 0.

Sistemas de 1ª Ordem



Os mancais de deslizamento causam atrito viscoso. A equação de movimento é

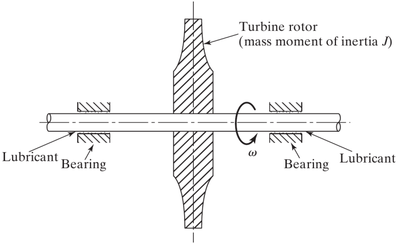
$$J\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} = 0,$$

ou

$$J\dot{\omega} + c_t\omega = 0.$$

Isto é uma EDO de ordem 1! Considerando uma velocidade inicial ω_0, podemos calcular o comportamento do sistema, que não é vibratório.

Sistemas de 1ª Ordem



Rotor in bearings

Os mancais de deslizamento causam atrito viscoso. A equação de movimento é

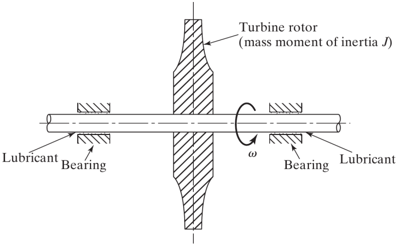
$$J\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} = 0,$$

ou

$$J\dot{\omega} + c_t\omega = 0.$$

Isto é uma EDO de ordem 1! Considerando uma velocidade inicial ω_0, podemos calcular o comportamento do sistema, que não é vibratório.

Sistemas de 1ª Ordem



Os mancais de deslizamento causam atrito viscoso. A equação de movimento é

$$J\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} = 0,$$

ou

$$J\dot{\omega} + c_t\omega = 0.$$

Isto é uma EDO de ordem 1! Considerando uma velocidade inicial ω_0, podemos calcular o comportamento do sistema, que não é vibratório.

Solução

Supondo que a resposta seja

$$\omega(t) = Ae^{st},$$

para $t = 0$ temos

$$A = \omega(t = 0) = \omega_0,$$

e a solução proposta torna-se

$$\omega(t) = \omega_0 e^{st}.$$

Substituindo na equação de movimento ficamos com

$$\omega_0 e^{st}(Js + c_t) = 0.$$

Solução

Supondo que a resposta seja

$$\omega(t) = Ae^{st},$$

para $t = 0$ temos

$$A = \omega(t = 0) = \omega_0,$$

e a solução proposta torna-se

$$\omega(t) = \omega_0 e^{st}.$$

Substituindo na equação de movimento ficamos com

$$\omega_0 e^{st}(Js + c_t) = 0.$$

Solução

Supondo que a resposta seja

$$\omega(t) = Ae^{st},$$

para $t = 0$ temos

$$A = \omega(t = 0) = \omega_0,$$

e a solução proposta torna-se

$$\omega(t) = \omega_0 e^{st}.$$

Substituindo na equação de movimento ficamos com

$$\omega_0 e^{st}(Js + c_t) = 0.$$

Solução

Supondo que a resposta seja

$$\omega(t) = Ae^{st},$$

para $t = 0$ temos

$$A = \omega(t = 0) = \omega_0,$$

e a solução proposta torna-se

$$\omega(t) = \omega_0 e^{st}.$$

Substituindo na equação de movimento ficamos com

$$\omega_0 e^{st}(Js + c_t) = 0.$$

Solução

A equação característica do sistema é

$$Js + c_t = 0$$

cuja única raiz é

$$s = -\frac{c_t}{J},$$

e a solução da equação original é então

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{c_t}{J}t}.$$

Solução

A equação característica do sistema é

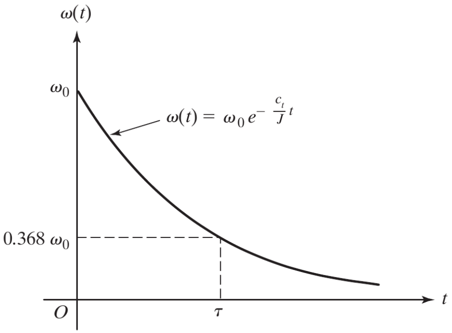
$$Js + c_t = 0$$

cuja única raiz é

$$s = -\frac{c_t}{J},$$

e a solução da equação original é então

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{c_t}{J}t}.$$



Variation of angular velocity

Constante Temporal

A constante temporal τ é definida como o valor do tempo para o qual o expoente da equação anterior é -1, ou

$$-\frac{c_t}{J}\tau = -1,$$

e assim

$$\tau = \frac{J}{c_t}.$$

Para $t = \tau$,

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{c_t}{J}\tau} = \omega_0 e^{-1} = 0.368\omega_0$$

Método de Rayleigh da Energia

Para um sistema em vibração livre não amortecida, a energia mecânica total é conservada.
Em dois tempos distintos então,

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2.$$

Escolhendo os tempos onde a energia cinética e potencial são máximas,

$$T_1 + 0 = 0 + U_2,$$

ou

$$T_{\text{max}} = U_{\text{max}}.$$

Esta simples equação permite o cálculo direto da frequência natural do sistema.

Método de Rayleigh da Energia

Para um sistema em vibração livre não amortecida, a energia mecânica total é conservada.
Em dois tempos distintos então,

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2.$$

Escolhendo os tempos onde a energia cinética e potencial são máximas,

$$T_1 + 0 = 0 + U_2,$$

ou

$$T_{\text{max}} = U_{\text{max}}.$$

Esta simples equação permite o cálculo direto da frequência natural do sistema.

Método de Rayleigh da Energia

Para um sistema em vibração livre não amortecida, a energia mecânica total é conservada.
Em dois tempos distintos então,

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2.$$

Escolhendo os tempos onde a energia cinética e potencial são máximas,

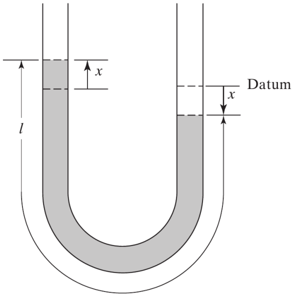
$$T_1 + 0 = 0 + U_2,$$

ou

$$T_{\max} = U_{\max}.$$

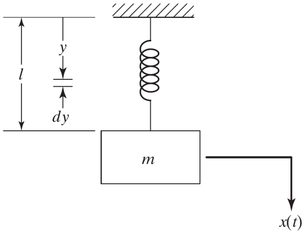
Esta simples equação permite o cálculo direto da frequência natural do sistema.

Manômetro para motor diesel



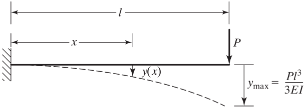
O escapamento de um motor diesel de um cilindro deve ser conectada a um silenciador, e a pressão dos gases deve ser medida com um manômetro de tubo em U. Calcule o menor comprimento do tubo de forma que a frequência natural de oscilação do mercúrio seja 3,50 vezes menor do que a as flutuações de pressão no escapamento quando o motor opera a 600 rpm.

Efeito da Massa da Mola



Determine o efeito da massa da mola na frequência natural do sistema mostrado.

Efeito da massa da coluna do tanque



Determine o efeito da massa da coluna do tanque de água do exemplo anterior na sua frequência natural.