Apresentação

- Prof. Ramiro Brito Willmersdorf;
- ramiro@willmersdorf.net (meio preferido);
- Sala F3, uma entrada antes do Xerox do 2º Andar;
- Tempo integral na Universidade;
- Horário de consulta livre, recomendável marcar;
- http://rbw.willmersdorf.net/ramiro/arquivos/vibracoes

Disciplina

- 60 horas, 36 aulas de 50 minutos;
- Avaliação através de 2 provas;
- Cai tudo na prova final;
- Cai tudo na segunda chamada;
- Solicitar 2ª chamada formalmente, na escolaridade;

Assuntos

- Fundamentos: classificação, elementos componentes, movimento harmônico, análise harmônica;
- Avaliação através de 2 provas;
- Sistemas com 1 grau de liberdade: vibração livre, forçada harmonicamente e geral;
- Sistemas com 2 graus de liberdade: frequências naturais e modos normais;
- Sistemas com n graus de liberdade: cálculo a partir de autovalores e autovetores;
- Sistemas contínuos;
- Métodos numéricos e aproximados;

Bibliografia

- *Vibrações Mecânicas*, Singiresu S. Rao, 4ª Edição;
- *Engineering Vibrations*, William J. Bottega;
- *Fundamentals of Structural Dynamics*, Roy Graig Jr., Andrew Kurdilla;
- Qualquer outro livro de vibrações mecânicas, a física não muda;
- Material suplementar;

Vibração

Estudo de movimentos que repetem-se periodicamente (ou não).

Um sistema vibratório contém:

- Um meio para armazenar energia potencial;
- Um meio para armazenar energia cinética;
- Mecanismo para dissipação de energia;

O movimento vibratório/oscilatório ocorre com a transferência de energia potencial para cinética, e vice-versa.

Vibração

Estudo de movimentos que repetem-se periodicamente (ou não).

Um sistema vibratório contém:

- Um meio para armazenar energia potencial;
- Um meio para armazenar energia cinética;
- Mecanismo para dissipação de energia;

O movimento vibratório/oscilatório ocorre com a transferência de energia potencial para cinética, e vice-versa.

Vibração

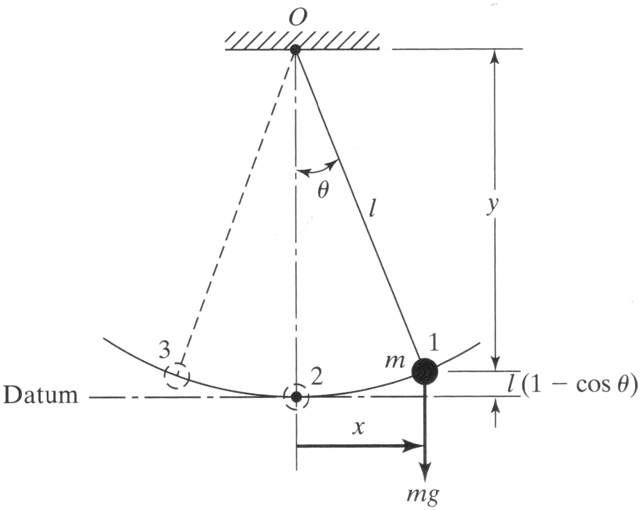
Estudo de movimentos que repetem-se periodicamente (ou não).

Um sistema vibratório contém:

- Um meio para armazenar energia potencial;
- Um meio para armazenar energia cinética;
- Mecanismo para dissipação de energia;

O movimento vibratório/oscilatório ocorre com a transferência de energia potencial para cinética, e vice-versa.

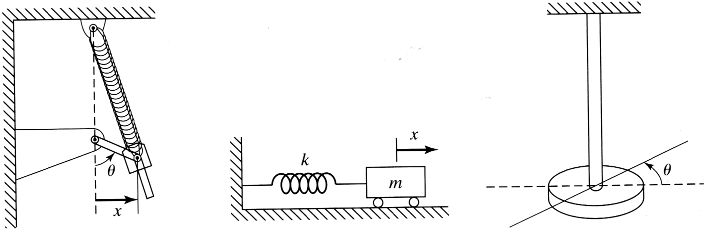
Sistema Vibratório – Exemplo



Número de Graus de Liberdade

Número mínimo de coordenada generalizadas necessárias para descrever a configuração do sistema.

Sistemas com 1 grau de liberdade:



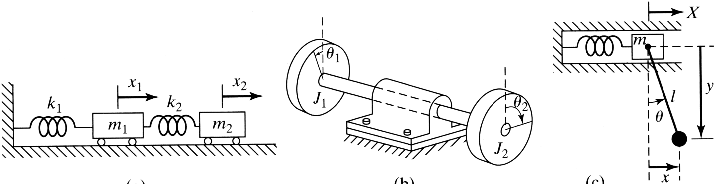
(a) Slider-crank-spring mechanism

(b) Spring-mass system

(c) Torsional system

Número de Graus de Liberdade

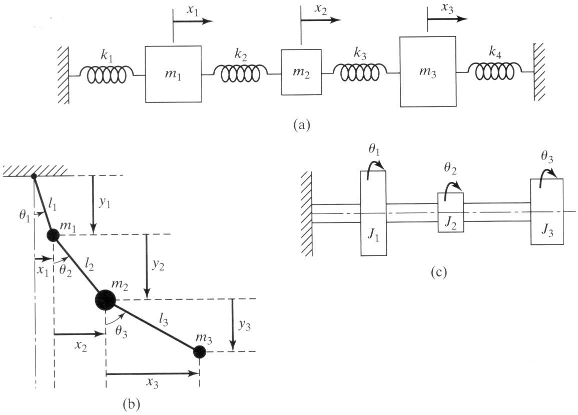
Sistemas com 2 graus de liberdade:



(a) (b) (c)

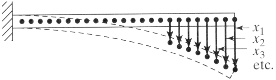
Número de Graus de Liberdade

Sistemas com 3 graus de liberdade:



Sistemas Contínuos e Discretos

A maioria dos sistemas mecânicos *reais* necessita de um número infinito de graus de liberdade para sua descrição completa. Estes são sistemas contínuos

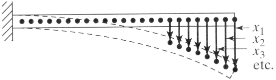


Um sistema que pode ser descrito por um número finito de graus de liberdade é um sistema discreto.

Métodos computacionais (MEF, MDF, etc.) normalmente geram modelos discretos.

Sistemas Contínuos e Discretos

A maioria dos sistemas mecânicos *reais* necessita de um número infinito de graus de liberdade para sua descrição completa. Estes são sistemas contínuos

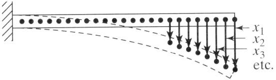


Um sistema que pode ser descrito por um número finito de graus de liberdade é um sistema discreto.

Métodos computacionais (MEF, MDF, etc.) normalmente geram modelos discretos.

Sistemas Contínuos e Discretos

A maioria dos sistemas mecânicos *reais* necessita de um número infinito de graus de liberdade para sua descrição completa. Estes são sistemas contínuos



Um sistema que pode ser descrito por um número finito de graus de liberdade é um sistema discreto.

Métodos computacionais (MEF, MDF, etc.) normalmente geram modelos discretos.

Forças Externas

Vibração Livre Após uma perturbação inicial, não há mais ação externa sobre o sistema. Não há ação de forças sobre o sistema.

Vibração Forçada O sistema sofre ação de forças (periódicas ou não).

No caso de vibração forçada, é possível a ocorrência de ressonância.

Forças Externas

Vibração Livre Após uma perturbação inicial, não há mais ação externa sobre o sistema. Não há ação de forças sobre o sistema.

Vibração Forçada O sistema sofre ação de forças (periódicas ou não).

No caso de vibração forçada, é possível a ocorrência de ressonância.

Amortecimento

Vibração Amortecida Existe um mecanismo de dissipação que transforma energia mecânica em energia térmica, em um processo irreversível. Pode ser atrito viscoso, seco, interno, etc.

Vibração Não Amortecida Não há um mecanismo dissipativo, a energia mecânica total é conservada.

Na prática, o amortecimento muitas vezes pode ser desprezado, exceto próximo à ressonância.

Amortecimento

Vibração Amortecida Existe um mecanismo de dissipação que transforma energia mecânica em energia térmica, em um processo irreversível. Pode ser atrito viscoso, seco, interno, etc.

Vibração Não Amortecida Não há um mecanismo dissipativo, a energia mecânica total é conservada.

Na prática, o amortecimento muitas vezes pode ser desprezado, exceto próximo à ressonância.

Linearidade

Vibração Linear Todas as relações massa $\times$ aceleração, rigidez $\times$ deslocamento e amortecimento $\times$ velocidade, são lineares. Vale o princípio da superposição. Técnicas relativamente simples e bem conhecidas;

Vibração Não Linear Alguma das relações constitutivas não é linear. Não vale o princípio da superposição. Técnicas menos bem determinadas.

As vezes uma solução linearizada é possível.

Linearidade

Vibração Linear Todas as relações massa $\times$ aceleração, rigidez $\times$ deslocamento e amortecimento $\times$ velocidade, são lineares. Vale o princípio da superposição. Técnicas relativamente simples e bem conhecidas;

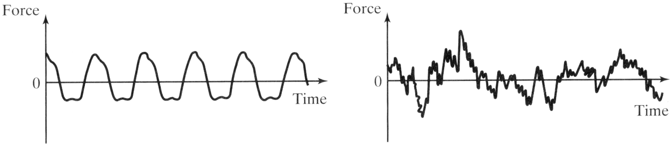
Vibração Não Linear Alguma das relações constitutivas não é linear. Não vale o princípio da superposição. Técnicas menos bem determinadas.

As vezes uma solução linearizada é possível.

Determinismo

Vibração Determinística Todas as propriedades mecânicas, relações constitutivas e forças são perfeitamente conhecidas em qualquer instante de tempo.

Vibração Não Determinística Alguma das grandezas que descrevem o sistema, normalmente as forças de excitação, são conhecidas apenas de forma estocástica.
Não é possível prever o comportamento futuro, exceto através de estatísticas.
Exemplos: terremotos, vento, ondas, *estradas*.



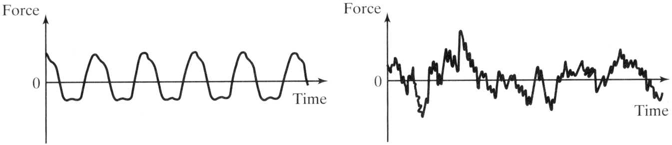
(a) A deterministic (periodic) excitation

(b) A random excitation

Determinismo

Vibração Determinística Todas as propriedades mecânicas, relações constitutivas e forças são perfeitamente conhecidas em qualquer instante de tempo.

Vibração Não Determinística Alguma das grandezas que descrevem o sistema, normalmente as forças de excitação, são conhecidas apenas de forma estocástica.
Não é possível prever o comportamento futuro, exceto através de estatísticas.
Exemplos: terremotos, vento, ondas, *estradas*.



(a) A deterministic (periodic) excitation (b) A random excitation

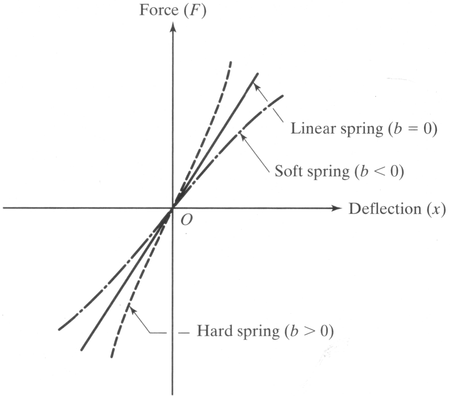
Molas

Características:

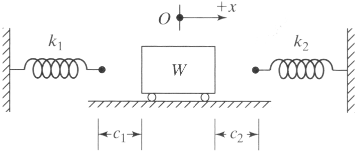
- Elemento mecânico que produz uma força em reação a um deslocamento;
- Mecânicas (helicoidais, torcionais, pneumáticas, etc.);
- Para molas lineares, $F = \kappa x$;
- Energia de deformação: $U = \int_0^x F \, \mathrm{d}x$;
- Para molas lineares, $U = \frac{1}{2}\kappa x^2$;

Molas Não Lineares

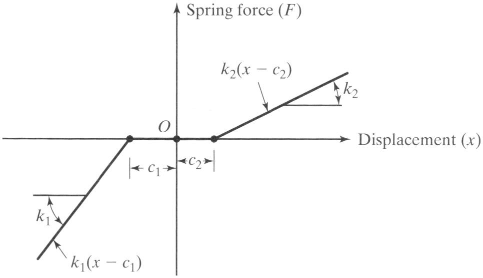
- Qualquer relação diferente de $F = \kappa x$;
- Normalmente, $F(x) = \kappa(x)x$;
- Pequenas não linearidades usualmente são representadas por molas cúbicas: $F(x) = ax + bx^3$, isto é, $\kappa(x) = a + bx^2$;



Molas Não Lineares

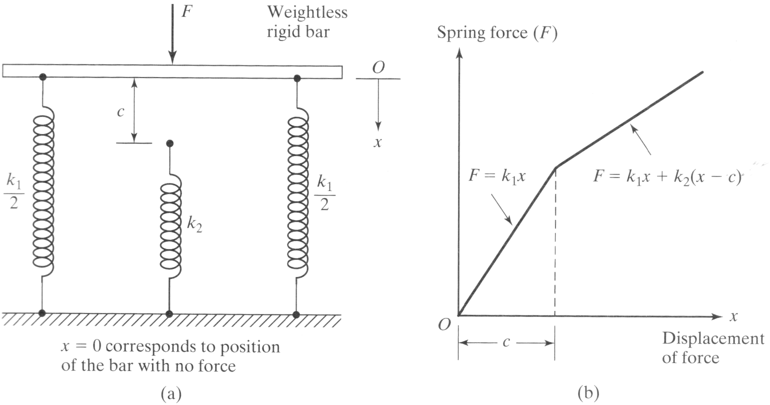


(a)



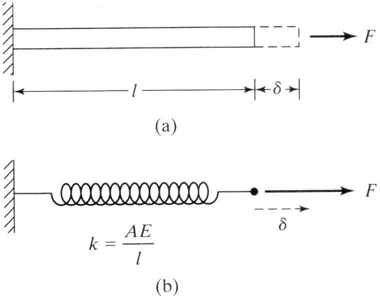
(b)

Molas Não Lineares



Constante de Mola de Barras

Barra homogênea de seção uniforme



$$\delta = \varepsilon l$$

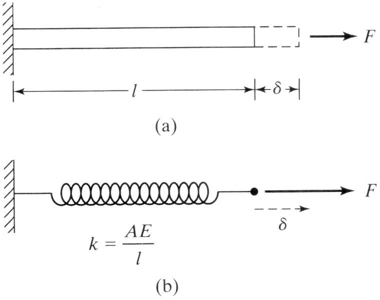
$$\delta = \frac{\sigma}{E} l$$

$$\delta = \frac{Fl}{AE}$$

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{AE}{l}$$

Constante de Mola de Barras

Barra homogênea de seção uniforme



$$\delta = \varepsilon l$$

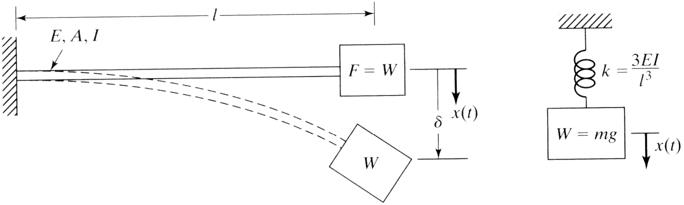
$$\delta = \frac{\sigma}{E} l$$

$$\delta = \frac{Fl}{AE}$$

$$\kappa = \frac{F}{\delta} = \frac{AE}{l}$$

Constante de Mola para Vigas em Balanço

Barra homogênea de seção uniforme



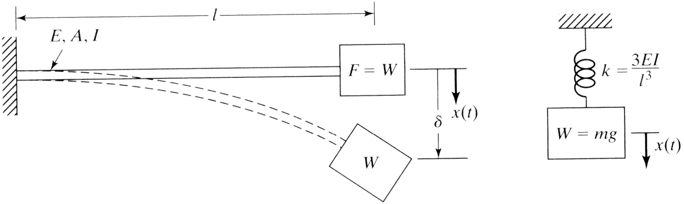
(a) Cantilever with end force

(b) Equivalent spring

$$\delta = \frac{Wl^3}{3EI} \qquad \kappa = \frac{W}{\delta} = \frac{3EI}{l^3}$$

Constante de Mola para Vigas em Balanço

Barra homogênea de seção uniforme



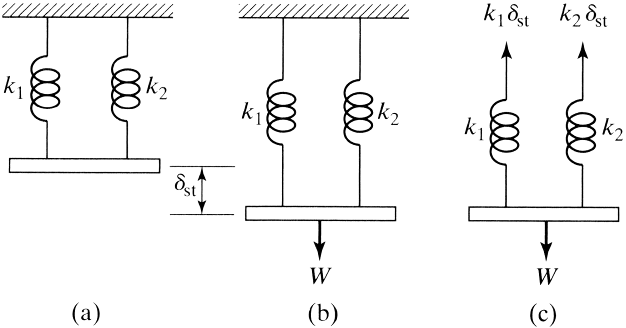
(a) Cantilever with end force

(b) Equivalent spring

$$\delta = \frac{Wl^3}{3EI} \qquad \kappa = \frac{W}{\delta} = \frac{3EI}{l^3}$$

Combinação de Molas

Molas em paralelo

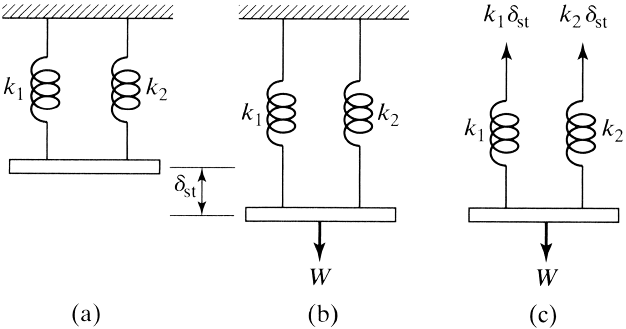


$$W = \kappa_1\delta_{st} + \kappa_2\delta_{st} \qquad W = (\kappa_1 + \kappa_2)\delta_{st} \qquad \kappa_{eq} = \kappa_1 + \kappa_2$$

Generalizando: $\kappa_{eq} = \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n$.

Combinação de Molas

Molas em paralelo

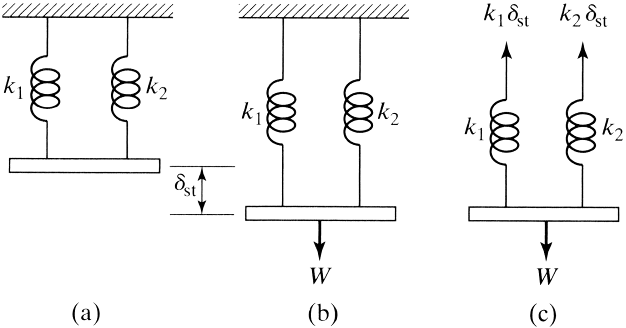


$$W = \kappa_1\delta_{st} + \kappa_2\delta_{st} \qquad W = (\kappa_1 + \kappa_2)\delta_{st} \qquad \kappa_{eq} = \kappa_1 + \kappa_2$$

Generalizando: $\kappa_{eq} = \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n$.

Combinação de Molas

Molas em paralelo

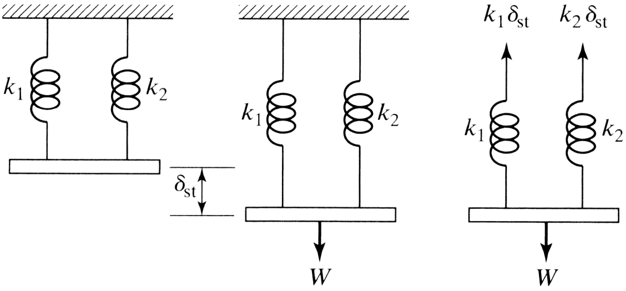


$$W = \kappa_1\delta_{st} + \kappa_2\delta_{st} \qquad W = (\kappa_1 + \kappa_2)\delta_{st} \qquad \kappa_{eq} = \kappa_1 + \kappa_2$$

Generalizando: $\kappa_{eq} = \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n$.

Combinação de Molas

Molas em paralelo



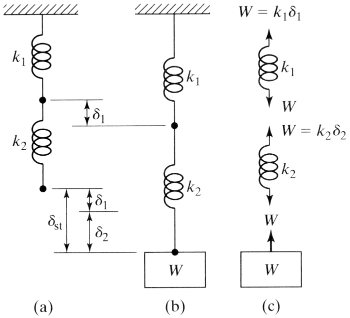
(a) (b) (c)

$$W = \kappa_1 \delta_{st} + \kappa_2 \delta_{st} \qquad W = (\kappa_1 + \kappa_2)\delta_{st} \qquad \kappa_{eq} = \kappa_1 + \kappa_2$$

Generalizando: $\kappa_{eq} = \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n$.

Combinação de Molas

Molas em série



$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2$$

$$W = \kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

$$\kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

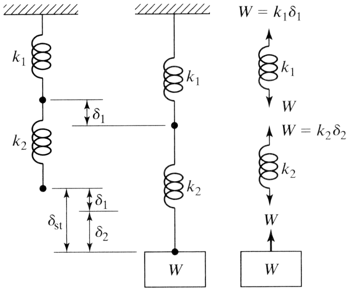
$$\delta_1 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} \qquad \delta_2 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2}$$

$$\frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} + \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2} = \delta_{st}$$

$$\frac{1}{\kappa_{eq}} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}$$

Combinação de Molas

Molas em série



(a) (b) (c)

$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2$$

$$W = \kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

$$\kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

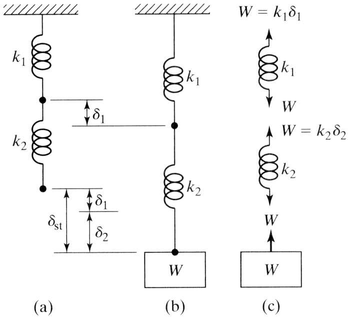
$$\delta_1 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} \qquad \delta_2 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2}$$

$$\frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} + \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2} = \delta_{st}$$

$$\frac{1}{\kappa_{eq}} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}$$

Combinação de Molas

Molas em série



$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2$$

$$W = \kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

$$\kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

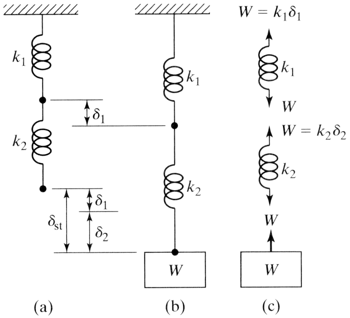
$$\delta_1 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} \qquad \delta_2 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2}$$

$$\frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} + \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2} = \delta_{st}$$

$$\frac{1}{\kappa_{eq}} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}$$

Combinação de Molas

Molas em série



$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2$$

$$W = \kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

$$\kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

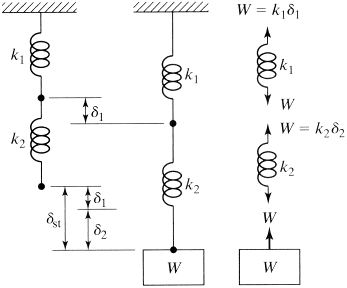
$$\delta_1 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} \qquad \delta_2 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2}$$

$$\frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} + \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2} = \delta_{st}$$

$$\frac{1}{\kappa_{eq}} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}$$

Combinação de Molas

Molas em série



(a) (b) (c)

$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2$$

$$W = \kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

$$\kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

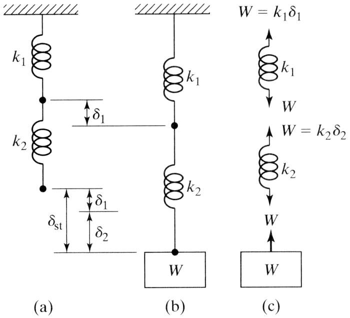
$$\delta_1 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} \qquad \delta_2 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2}$$

$$\frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} + \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2} = \delta_{st}$$

$$\frac{1}{\kappa_{eq}} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}$$

Combinação de Molas

Molas em série



$$\delta_{st} = \delta_1 + \delta_2$$

$$W = \kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

$$\kappa_1\delta_1 = \kappa_2\delta_2 = \kappa_{eq}\delta_{st}$$

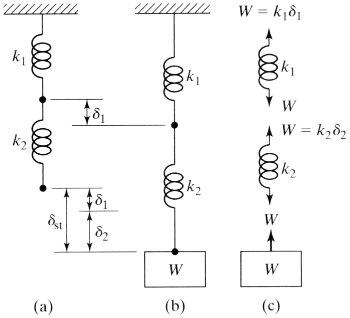
$$\delta_1 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} \qquad \delta_2 = \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2}$$

$$\frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_1} + \frac{\kappa_{eq}\delta_{st}}{\kappa_2} = \delta_{st}$$

$$\frac{1}{\kappa_{eq}} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}$$

Combinação de Molas

Molas em série

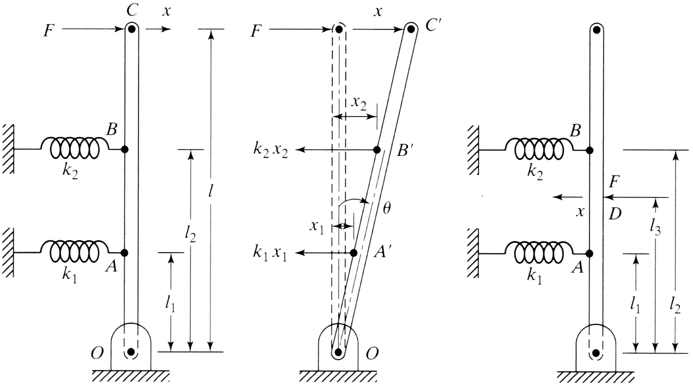


Generalizando:

$$\frac{1}{\kappa_{eq}} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \cdots + \frac{1}{\kappa_n}$$

Combinação de Molas

Princípio Geral: sistema equivalente com mesma energia potencial.
Exemplo (pequenos deslocamentos):



(a) (b) (c)

Combinação de Molas

Por equilíbrio:

$$x_1 = l_1 \sin\theta \qquad x_2 = l_2 \sin\theta,$$

pequenos deslocamentos

$$x_1 = l_1\theta \qquad x_2 = l_2\theta,$$

equilíbrio de momentos

$$\kappa_1 x_1 l_1 + \kappa_2 x_2 l_2 = Fl,$$

ou

$$F = \kappa_1 \frac{x_1 l_1}{l} + \kappa_2 \frac{x_2 l_2}{l}.$$

Combinação de Molas

Por equilíbrio:

$$x_1 = l_1 \sin\theta \qquad x_2 = l_2 \sin\theta,$$

pequenos deslocamentos

$$x_1 = l_1\theta \qquad x_2 = l_2\theta,$$

equilíbrio de momentos

$$\kappa_1 x_1 l_1 + \kappa_2 x_2 l_2 = Fl,$$

ou

$$F = \kappa_1 \frac{x_1 l_1}{l} + \kappa_2 \frac{x_2 l_2}{l}.$$

Combinação de Molas

Por equilíbrio:

$$x_1 = l_1 \sin\theta \qquad x_2 = l_2 \sin\theta,$$

pequenos deslocamentos

$$x_1 = l_1\theta \qquad x_2 = l_2\theta,$$

equilíbrio de momentos

$$\kappa_1 x_1 l_1 + \kappa_2 x_2 l_2 = Fl,$$

ou

$$F = \kappa_1 \frac{x_1 l_1}{l} + \kappa_2 \frac{x_2 l_2}{l}.$$

Combinação de Molas

Por equilíbrio:

$$x_1 = l_1 \sin\theta \qquad x_2 = l_2 \sin\theta,$$

pequenos deslocamentos

$$x_1 = l_1\theta \qquad x_2 = l_2\theta,$$

equilíbrio de momentos

$$\kappa_1 x_1 l_1 + \kappa_2 x_2 l_2 = Fl,$$

ou

$$F = \kappa_1 \frac{x_1 l_1}{l} + \kappa_2 \frac{x_2 l_2}{l}.$$

Combinação de Molas

Continuando...

$$F = \kappa_{\text{eq}} x = \kappa_1 \frac{x_1 l_1}{l} + \kappa_2 \frac{x_2 l_2}{l}$$

e

$$x = l\theta, \quad x_1 = l_1\theta, \quad x_2 = l_2\theta,$$

assim

$$\kappa_{\text{eq}} l\theta = \kappa_1 \frac{l_1^2\theta}{l} + \kappa_2 \frac{l_2^2\theta}{l}$$

portanto

$$\kappa_{\text{eq}} = \kappa_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \kappa_2 \left(\frac{l_2}{l}\right)^2$$

Combinação de Molas

Continuando...

$$F = \kappa_{\mathrm{eq}} x = \kappa_1 \frac{x_1 l_1}{l} + \kappa_2 \frac{x_2 l_2}{l}$$

e

$$x = l\theta, \quad x_1 = l_1\theta, \quad x_2 = l_2\theta,$$

assim

$$\kappa_{\mathrm{eq}} l\theta = \kappa_1 \frac{l_1^2\theta}{l} + \kappa_2 \frac{l_2^2\theta}{l}$$

portanto

$$\kappa_{\mathrm{eq}} = \kappa_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \kappa_2 \left(\frac{l_2}{l}\right)^2$$

Combinação de Molas

Continuando...

$$F = \kappa_{\mathrm{eq}} x = \kappa_1 \frac{x_1 l_1}{l} + \kappa_2 \frac{x_2 l_2}{l}$$

e

$$x = l\theta, \quad x_1 = l_1\theta, \quad x_2 = l_2\theta,$$

assim

$$\kappa_{\mathrm{eq}} l\theta = \kappa_1 \frac{l_1^2 \theta}{l} + \kappa_2 \frac{l_2^2 \theta}{l}$$

portanto

$$\kappa_{\mathrm{eq}} = \kappa_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \kappa_2 \left(\frac{l_2}{l}\right)^2$$

Combinação de Molas

Continuando...

$$F = \kappa_{\text{eq}} x = \kappa_1 \frac{x_1 l_1}{l} + \kappa_2 \frac{x_2 l_2}{l}$$

e

$$x = l\theta, \quad x_1 = l_1\theta, \quad x_2 = l_2\theta,$$

assim

$$\kappa_{\text{eq}} l\theta = \kappa_1 \frac{l_1^2 \theta}{l} + \kappa_2 \frac{l_2^2 \theta}{l}$$

portanto

$$\kappa_{\text{eq}} = \kappa_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \kappa_2 \left(\frac{l_2}{l}\right)^2$$

Combinação de Molas

Por energia:

Trabalho da força F = Energia armazenada nas molas κ_1 e κ_2

Para pequenos deslocamentos:

$$\frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}\kappa_{\text{eq}}x^2 = \frac{1}{2}\kappa_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 x_2^2,$$

mas como

$$\frac{x}{l} = \frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2},$$

temos

$$x_1 = \frac{x l_1}{l}, \quad x_2 = \frac{x l_2}{l},$$

portanto

$$\kappa_{\text{eq}} = \kappa_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \kappa_2 \left(\frac{l_2}{l}\right)^2.$$

Combinação de Molas

Por energia:

Trabalho da força F = Energia armazenada nas molas κ_1 e κ_2

Para pequenos deslocamentos:

$$\frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}\kappa_{\mathrm{eq}}x^2 = \frac{1}{2}\kappa_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 x_2^2,$$

mas como

$$\frac{x}{l} = \frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2},$$

temos

$$x_1 = \frac{xl_1}{l}, \quad x_2 = \frac{xl_2}{l},$$

portanto

$$\kappa_{\mathrm{eq}} = \kappa_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \kappa_2 \left(\frac{l_2}{l}\right)^2.$$

Combinação de Molas

Por energia:

Trabalho da força F = Energia armazenada nas molas κ_1 e κ_2

Para pequenos deslocamentos:

$$\frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}\kappa_{\text{eq}}x^2 = \frac{1}{2}\kappa_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 x_2^2,$$

mas como

$$\frac{x}{l} = \frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2},$$

temos

$$x_1 = \frac{x l_1}{l}, \quad x_2 = \frac{x l_2}{l},$$

portanto

$$\kappa_{\text{eq}} = \kappa_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \kappa_2 \left(\frac{l_2}{l}\right)^2.$$

Combinação de Molas

Por energia:

Trabalho da força F = Energia armazenada nas molas κ_1 e κ_2

Para pequenos deslocamentos:

$$\frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}\kappa_{\mathrm{eq}}x^2 = \frac{1}{2}\kappa_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 x_2^2,$$

mas como

$$\frac{x}{l} = \frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2},$$

temos

$$x_1 = \frac{xl_1}{l}, \quad x_2 = \frac{xl_2}{l},$$

portanto

$$\kappa_{\mathrm{eq}} = \kappa_1\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \kappa_2\left(\frac{l_2}{l}\right)^2.$$

Combinação de Molas

Por energia:

Trabalho da força F = Energia armazenada nas molas κ_1 e κ_2

Para pequenos deslocamentos:

$$\frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}\kappa_{\text{eq}}x^2 = \frac{1}{2}\kappa_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 x_2^2,$$

mas como

$$\frac{x}{l} = \frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2},$$

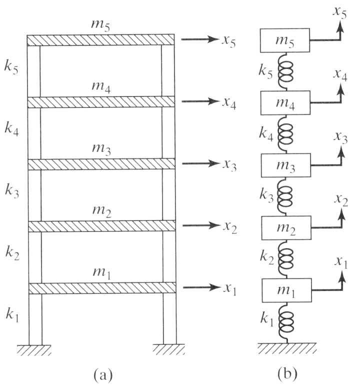
temos

$$x_1 = \frac{xl_1}{l}, \quad x_2 = \frac{xl_2}{l},$$

portanto

$$\kappa_{\text{eq}} = \kappa_1\left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + \kappa_2\left(\frac{l_2}{l}\right)^2.$$

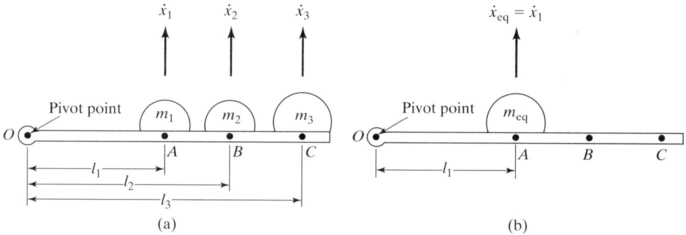
Massas



- Consideradas corpos rígidos, $F = ma$.
- O trabalho aplicado sobre uma massa é armazenado na forma de energia cinética.
- Normalmente podem ser consideradas *concentradas*.

Combinação de massas

Princípio geral: determinar um sistema equivalente com a mesma energia cinética.
Exemplo 1: Determinar uma massa equivalente localizada em m_1.



Combinação de massas

Continuação...
Para pequenos deslocamentos,

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1}\dot{x}_1\,, \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1}\dot{x}_1\,, \quad \text{e} \quad \dot{x}_{eq} = \dot{x}_1\,.$$

Igualando as energias cinéticas

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}_{eq}^2\,,$$

assim

$$m_{eq} = m_1 + m_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2$$

Combinação de massas

Continuação...
Para pequenos deslocamentos,

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1}\dot{x}_1 , \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1}\dot{x}_1 , \quad \text{e} \quad \dot{x}_{\text{eq}} = \dot{x}_1 .$$

Igualando as energias cinéticas

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_{\text{eq}}\dot{x}_{\text{eq}}^2 ,$$

assim

$$m_{\text{eq}} = m_1 + m_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2$$

Combinação de massas

Continuação...
Para pequenos deslocamentos,

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1}\dot{x}_1\,, \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1}\dot{x}_1\,, \quad \text{e} \quad \dot{x}_{eq} = \dot{x}_1\,.$$

Igualando as energias cinéticas

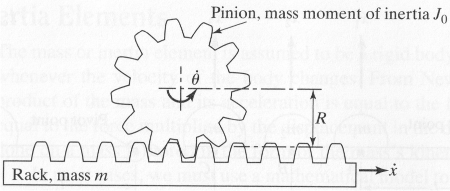
$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}_{eq}^2\,,$$

assim

$$m_{eq} = m_1 + m_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2$$

Combinação de massas

Exemplo 2: Acoplamento de inércia rotacional e translacional.

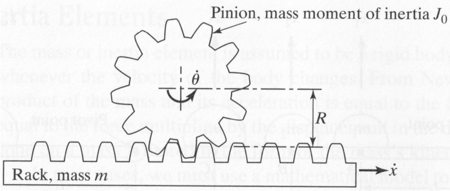


A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2.$$

Combinação de massas

Exemplo 2: Acoplamento de inércia rotacional e translacional.



A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente translacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{x}_{\text{eq}} = \dot{x}, \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2,$$

portanto

$$m_{\text{eq}} = m + \frac{J_0}{R^2}.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente translacional

A energia cinética é

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2,$$

sabendo que

$$\dot{x}_{eq} = \dot{x}, \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2,$$

portanto

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente translacional

A energia cinética é

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2,$$

sabendo que

$$\dot{x}_{eq} = \dot{x}, \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2,$$

portanto

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente translacional

A energia cinética é

$$T_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}_{eq}^2,$$

sabendo que

$$\dot{x}_{eq} = \dot{x}, \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2,$$

portanto

$$m_{eq} = m + \frac{J_0}{R^2}.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente rotacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{\theta}_{\text{eq}} = \dot{\theta}, \quad \text{e} \quad \dot{x} = R\dot{\theta},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2,$$

portanto

$$J_{\text{eq}} = J_0 + mR^2.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente rotacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{\theta}_{\text{eq}} = \dot{\theta}, \quad \text{e} \quad \dot{x} = R\dot{\theta},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2,$$

portanto

$$J_{\text{eq}} = J_0 + mR^2.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente rotacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{\theta}_{\text{eq}} = \dot{\theta}, \quad \text{e} \quad \dot{x} = R\dot{\theta},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2,$$

portanto

$$J_{\text{eq}} = J_0 + mR^2.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente rotacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{\theta}_{\text{eq}} = \dot{\theta}, \quad \text{e} \quad \dot{x} = R\dot{\theta},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2,$$

portanto

$$J_{\text{eq}} = J_0 + mR^2.$$

Amortecimento

- Nos sistemas vibratórios reais, a energia mecânica é transformada em calor ou som.
- As amplitudes de vibração diminuem progressivamente, no caso de vibração livre.
- O efeito do amortecimento é particularmente importante próximo à ressonância, pois é o fenômeno que limita a amplitude.
- Nos modelos simplificados, os amortecedores não tem massa nem elasticidade.
- Só existe amortecimento quando há velocidade relativa entre as extremidades do amortecedor.
- Três tipos: *viscoso*, *seco* ou de *material*.

Mecanismos de Amortecimento

- Viscoso
  - Mecanismo mais comum na análise de vibrações.
  - Cisalhamento entre camadas fluidas adjacentes.
  - Normalmente a força resistente é tomada como proporcional à velocidade relativa.
- Seco
  - Ou *Mohr-Coulomb*.
  - Força de atrito constante.
  - Mecanismo não linear e complexo.
- de Material
  - Ou *Sólido* ou *Amortecimento Histerético*.
  - Resulta do não retorno de toda a energia elástica armazenada na compressão de um material
  - Mecanismo não linear e complexo.
  - Caracterizado por um *laço de histerese*.

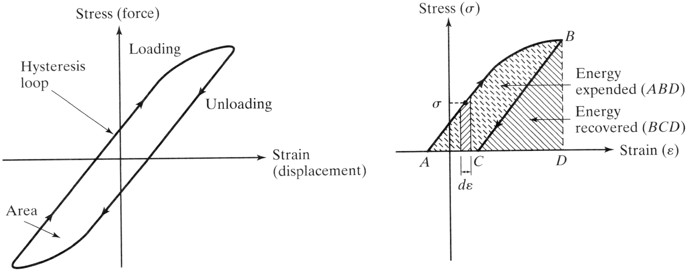
Mecanismos de Amortecimento

- Viscoso
  - Mecanismo mais comum na análise de vibrações.
  - Cisalhamento entre camadas fluidas adjacentes.
  - Normalmente a força resistente é tomada como proporcional à velocidade relativa.
- Seco
  - Ou *Mohr-Coulomb*.
  - Força de atrito constante.
  - Mecanismo não linear e complexo.
- de Material
  - Ou *Sólido* ou *Amortecimento Histerético*.
  - Resulta do não retorno de toda a energia elástica armazenada na compressão de um material
  - Mecanismo não linear e complexo.
  - Caracterizado por um *laço de histerese*.

Mecanismos de Amortecimento

- Viscoso
  - Mecanismo mais comum na análise de vibrações.
  - Cisalhamento entre camadas fluidas adjacentes.
  - Normalmente a força resistente é tomada como proporcional à velocidade relativa.
- Seco
  - Ou *Mohr-Coulomb*.
  - Força de atrito constante.
  - Mecanismo não linear e complexo.
- de Material
  - Ou *Sólido* ou *Amortecimento Histerético*.
  - Resulta do não retorno de toda a energia elástica armazenada na compressão de um material
  - Mecanismo não linear e complexo.
  - Caracterizado por um *laço de histerese*.

Laço de Histerese



(a) (b)

Combinação de Amortecedores

- Procedimento análogo à combinação de molas.
- Para pequenos deslocamentos (problemas lineares) as relações são as mesmas.
- Amortecedores em paralelo:

$$c_{\text{eq}} = c_1 + c_2$$

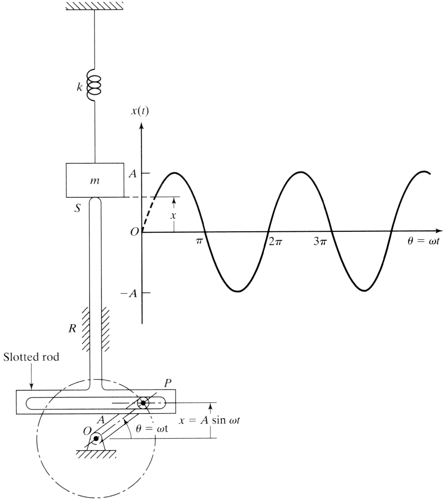
- Amortecedores em série:

$$\frac{1}{c_{\text{eq}}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

Movimento Harmônico

- Se o movimento se repete em intervalos constantes de tempo o movimento é *periódico*.
- O tipo de movimento periódico mais simples e útil na prática é o movimento harmônico.

Movimento Harmônico – Exemplo



Movimento Harmônico – Exemplo

Deslocamento vertical

$$x = A\sin\theta = A\sin\omega t$$

Velocidade vertical

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A\cos\omega t$$

Aceleração vertical

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\sin\omega t = -\omega^2 x$$

Movimento Harmônico – Exemplo

Deslocamento vertical

$$x = A\sin\theta = A\sin\omega t$$

Velocidade vertical

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A\cos\omega t$$

Aceleração vertical

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\sin\omega t = -\omega^2 x$$

Movimento Harmônico – Exemplo

Deslocamento vertical

$$x = A \sin \theta = A \sin \omega t$$

Velocidade vertical

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A \cos \omega t$$

Aceleração vertical

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x$$

Representação Vetorial do Movimento Harmônico

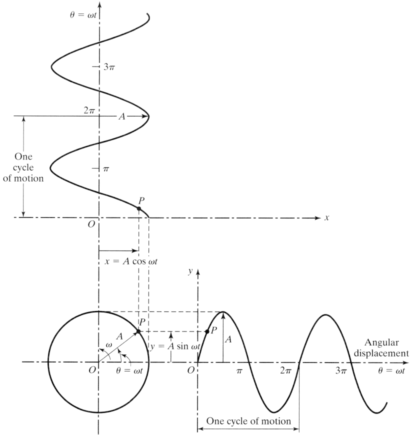
Consideramos um vetor com comprimento A girando com velocidade angular contante ω, e tomamos as projeções de sua extremidade.

Projeção vertical:

$$y = A \sin \omega t$$

Projeção horizontal:

$$x = A \cos \omega t$$



Representação Vetorial do Movimento Harmônico

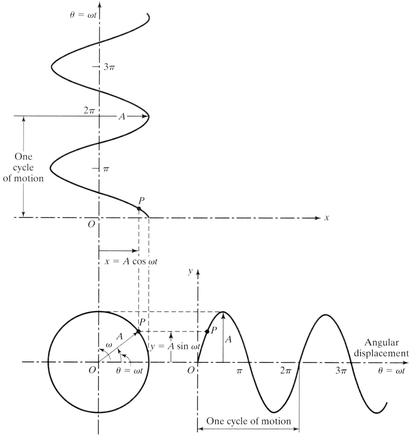
Consideramos um vetor com comprimento A girando com velocidade angular contante ω, e tomamos as projeções de sua extremidade.

Projeção vertical:

$$y = A \sin \omega t$$

Projeção horizontal:

$$x = A \cos \omega t$$



Representação Vetorial do Movimento Harmônico

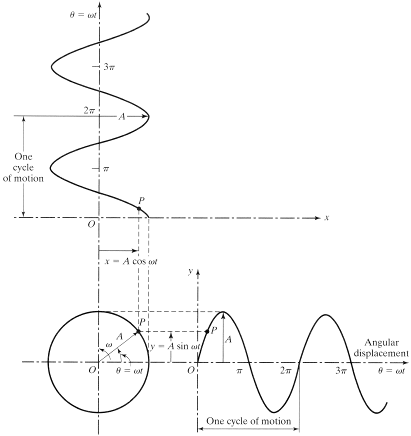
Consideramos um vetor com comprimento A girando com velocidade angular contante ω, e tomamos as projeções de sua extremidade.

Projeção vertical:

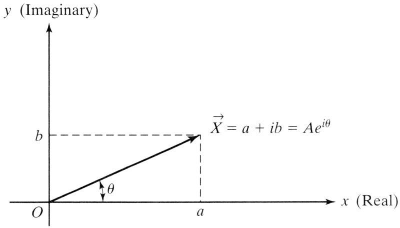
$$y = A \sin \omega t$$

Projeção horizontal:

$$x = A \cos \omega t$$



Representação com Números Complexos



Número complexo:

$$\vec{X} = a + ib$$

onde

$$i = \sqrt{-1}$$

ou vetor no plano complexo

$$\vec{X} = A\cos\theta + iA\sin\theta$$

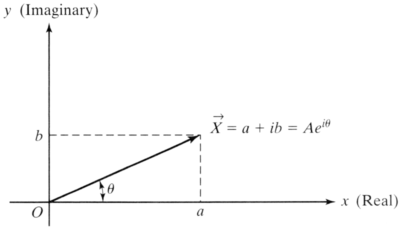
com

$$A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}.$$

Representação com Números Complexos



Número complexo:

$$\vec{X} = a + ib$$

onde

$$i = \sqrt{-1}$$

ou vetor no plano complexo

$$\vec{X} = A\cos\theta + iA\sin\theta$$

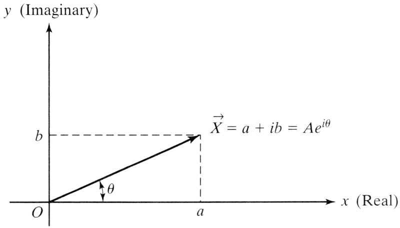
com

$$A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}.$$

Representação com Números Complexos



Número complexo:

$$\vec{X} = a + ib$$

onde

$$i = \sqrt{-1}$$

ou vetor no plano complexo

$$\vec{X} = A\cos\theta + iA\sin\theta$$

com

$$A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}.$$

Representação com Números Complexos

Lembrando que:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \dots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \qquad \text{e}$$

$$i\sin\theta = i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots.$$

Somando as duas expressões:

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots,$$

Representação com Números Complexos

Lembrando que:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ldots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \qquad \text{e}$$

$$i\sin\theta = i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots .$$

Somando as duas expressões:

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots ,$$

Representação com Números Complexos

Lembrando que:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ldots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \qquad \text{e}$$

$$i\sin\theta = i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots.$$

Somando as duas expressões:

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots,$$

Representação com Números Complexos

Lembrando que:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ldots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \qquad \text{e}$$

$$i\sin\theta = i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots.$$

Somando as duas expressões:

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots,$$

Representação com Números Complexos

mas,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ,$$

assim

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Como consequência:

$$\vec{X} = A(\cos\theta + i\sin\theta) = Ae^{i\theta}.$$

Representação com Números Complexos

mas,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ,$$

assim

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Como consequência:

$$\vec{X} = A(\cos\theta + i\sin\theta) = Ae^{i\theta}.$$

Representação com Números Complexos

mas,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ,$$

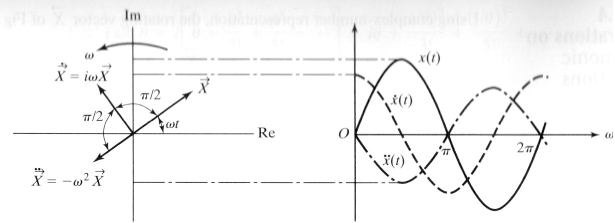
assim

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Como consequência:

$$\vec{X} = A(\cos\theta + i\sin\theta) = Ae^{i\theta}.$$

Operações com a Representação Complexa



Como

$$\vec{X} = Ae^{i\omega t},$$

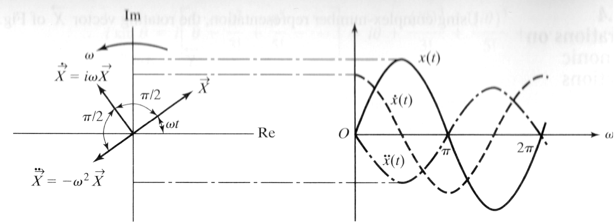
$$\dot{\vec{X}} = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega\vec{X},$$

e

$$\ddot{\vec{X}} = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2\vec{X}.$$

$\vec{X}$ é um número complexo!

Operações com a Representação Complexa



Como

$$\vec{X} = Ae^{i\omega t},$$

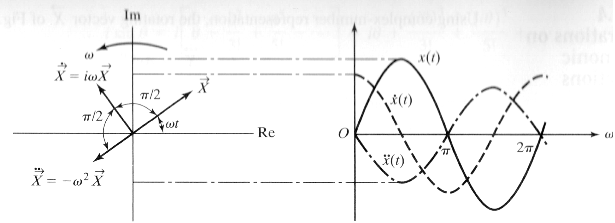
$$\dot{\vec{X}} = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega\vec{X},$$

e

$$\ddot{\vec{X}} = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2\vec{X}.$$

$\vec{X}$ é um número complexo!

Operações com a Representação Complexa



Como

$$\vec{X} = Ae^{i\omega t},$$

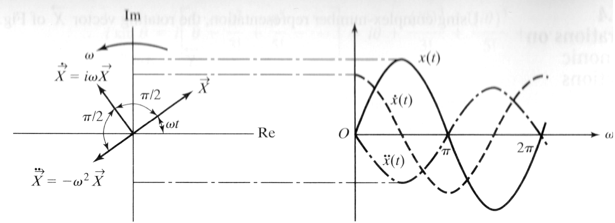
$$\dot{\vec{X}} = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega\vec{X},$$

e

$$\ddot{\vec{X}} = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2\vec{X}.$$

$\vec{X}$ é um número complexo!

Operações com a Representação Complexa



Como

$$\vec{X} = Ae^{i\omega t},$$

$$\dot{\vec{X}} = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega\vec{X},$$

e

$$\ddot{\vec{X}} = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2\vec{X}.$$

$\vec{X}$ é um número complexo!

Operações com a Representação Complexa

Tomando as partes reais:
Deslocamento:

$$\mathrm{Re}[Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = A\cos\omega t$$

Velocidade:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[i\omega Ae^{i\omega t}] &= \mathrm{Re}[i\omega A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = \mathrm{Re}[\omega A(i\cos\omega t - \sin\omega t)] \\ &= -\omega A\sin\omega t\end{aligned}$$

Aceleração:

$$\mathrm{Re}[-\omega^2 Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[-\omega^2 A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = -\omega^2 A\cos\omega t$$

Operações com a Representação Complexa

Tomando as partes reais:
Deslocamento:

$$\mathrm{Re}[Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = A\cos\omega t$$

Velocidade:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[i\omega Ae^{i\omega t}] &= \mathrm{Re}[i\omega A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = \mathrm{Re}[\omega A(i\cos\omega t - \sin\omega t)]\\ &= -\omega A\sin\omega t\end{aligned}$$

Aceleração:

$$\mathrm{Re}[-\omega^2 Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[-\omega^2 A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = -\omega^2 A\cos\omega t$$

Operações com a Representação Complexa

Tomando as partes reais:
Deslocamento:

$$\mathrm{Re}[Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = A\cos\omega t$$

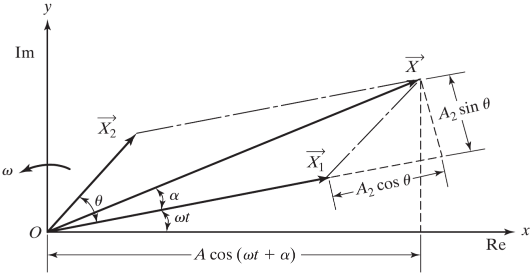
Velocidade:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[i\omega Ae^{i\omega t}] &= \mathrm{Re}[i\omega A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = \mathrm{Re}[\omega A(i\cos\omega t - \sin\omega t)] \\ &= -\omega A\sin\omega t\end{aligned}$$

Aceleração:

$$\mathrm{Re}[-\omega^2 Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[-\omega^2 A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = -\omega^2 A\cos\omega t$$

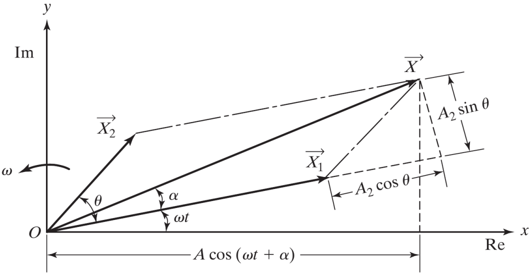
Adição Vetorial da Representação Complexa



$$\vec{X}_1(t) = A_1 e^{i\omega t}, \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 e^{i(\omega t+\theta)}$$

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos\theta)^2 + (A_2\sin\theta)^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{A_2\sin\theta}{A_1 + A_2\cos\theta}\right)$$

Adição Vetorial da Representação Complexa



$$\vec{X}_1(t) = A_1 e^{i\omega t}, \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 e^{i(\omega t+\theta)}$$

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos\theta)^2 + (A_2\sin\theta)^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{A_2\sin\theta}{A_1 + A_2\cos\theta}\right)$$

Adição via Trigonometria

Se a frequência é igual:

$$\vec{X}_1(t) = A_1 \cos(\omega t), \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta)$$

$$\begin{aligned} \vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(\omega t + \theta) \\ &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \left(\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\right) \\ &= \cos(\omega t)(A_1 + A_2 \cos(\theta)) - \sin(\omega t)(A_2 \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Definindo

$$A\cos(\phi) = A_1 + A_2\cos(\theta), \qquad A\sin(\phi) = A_2 \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned} \vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A\left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right) \\ &= A\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Adição via Trigonometria

Se a frequência é igual:

$$\vec{X}_1(t) = A_1 \cos(\omega t), \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(\omega t + \theta) \\
&= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \left(\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\right) \\
&= \cos(\omega t)(A_1 + A_2 \cos(\theta)) - \sin(\omega t)(A_2 \sin(\theta))
\end{aligned}$$

Definindo

$$A \cos(\phi) = A_1 + A_2 \cos(\theta), \qquad A \sin(\phi) = A_2 \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A\left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right) \\
&= A \cos(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

Adição via Trigonometria

Se a frequência é igual:

$$\vec{X}_1(t) = A_1\cos(\omega t), \qquad \vec{X}_2(t) = A_2\cos(\omega t + \theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A_1\cos(\omega t) + A_2\cos(\omega t + \theta) \\
&= A_1\cos(\omega t) + A_2\left(\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\right) \\
&= \cos(\omega t)(A_1 + A_2\cos(\theta)) - \sin(\omega t)(A_2\sin(\theta))
\end{aligned}$$

Definindo

$$A\cos(\phi) = A_1 + A_2\cos(\theta), \qquad A\sin(\phi) = A_2\sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A\left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right) \\
&= A\cos(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

Adição via Trigonometria

Se a frequência é igual:

$$\vec{X}_1(t) = A_1 \cos(\omega t), \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(\omega t + \theta) \\
&= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \left(\cos(\omega t) \cos(\theta) - \sin(\omega t) \sin(\theta)\right) \\
&= \cos(\omega t)(A_1 + A_2 \cos(\theta)) - \sin(\omega t)(A_2 \sin(\theta))
\end{aligned}$$

Definindo

$$A \cos(\phi) = A_1 + A_2 \cos(\theta), \qquad A \sin(\phi) = A_2 \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A \left(\cos(\omega t) \cos(\phi) - \sin(\omega t) \sin(\phi)\right) \\
&= A \cos(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

Adição via Trigonometria

Se a frequência é igual:

$$\vec{X}_1(t) = A_1 \cos(\omega t), \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(\omega t + \theta) \\
&= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \left(\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\right) \\
&= \cos(\omega t)(A_1 + A_2 \cos(\theta)) - \sin(\omega t)(A_2 \sin(\theta))
\end{aligned}$$

Definindo

$$A \cos(\phi) = A_1 + A_2 \cos(\theta), \qquad A \sin(\phi) = A_2 \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A \left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right) \\
&= A \cos(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

Adição via Trigonometria

Claramente,

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos(\theta))^2 + A_2\sin(\theta)^2}$$

e

$$\tan(\phi) = \frac{A_2\sin(\theta)}{A_1 + A_2\cos(\theta)}$$

A soma de duas funções harmônicas de mesma frequência é uma função harmônica com a mesma frequência, defasada.

Adição via Trigonometria

Claramente,

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos(\theta))^2 + A_2 \sin(\theta)^2}$$

e

$$\tan(\phi) = \frac{A_2 \sin(\theta)}{A_1 + A_2 \cos(\theta)}$$

A soma de duas funções harmônicas de mesma frequência é uma função harmônica com a mesma frequência, defasada.

Definições Importantes

Ciclo Um período completo de movimento do corpo.

Amplitude O máximo deslocamento do corpo em relação à posição de equilíbrio.

Período O tempo necessário para completar um ciclo.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

ω é a *frequência circular* (em rad/s).

Frequência Número de ciclos por unidade de tempo (em Hertz).

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Definições Importantes

Ângulo de Fase Distância angular entre dois movimentos vibratórios.

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = A_2 e^{i(\omega t + \phi)}$$

Frequência Natural Frequência em que um sistema com 1 grau de liberdade oscila em vibração livre a partir de um deslocamento inicial.

Oitava Faixa de frequências na qual o limite superior é o dobro do limite inferior, eg, 200-400 Hz.

Decibel

Em eletricidade, acústica e vibrações, é normal medir-se grandezas com uma grande faixa de variação. O decibel é usado para criar uma escala logaritmica para estas grandezas.
Por definição:

$$dB = 10 \log \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

onde P_0 é uma potência de referência.

Como a potência elétrica é proporcional ao quadrado da voltagem,

$$dB = 10 \log \left(\frac{X}{X_0} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{X}{X_0} \right)$$

onde X_0 é uma potência de referência.

Decibel

Em eletricidade, acústica e vibrações, é normal medir-se grandezas com uma grande faixa de variação. O decibel é usado para criar uma escala logaritmica para estas grandezas.
Por definição:

$$dB = 10\log\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

onde P_0 é uma potência de referência.

Como a potência elétrica é proporcional ao quadrado da voltagem,

$$dB = 10\log\left(\frac{X}{X_0}\right)^2 = 20\log\left(\frac{X}{X_0}\right)$$

onde X_0 é uma potência de referência.

Batimento

Quando duas funções harmônicas com frequências próximas são somadas, uma coisa curiosa acontece:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= X \cos \omega t \\
x_2 &= X \cos(\omega + \delta)t, \qquad \delta << \omega
\end{aligned}
$$

Somando as duas equações

$$x(t) = X\left[\cos \omega t + \cos(\omega + \delta)t\right]$$

Sabendo que

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Temos

$$x(t) = 2X \cos \frac{\delta t}{2} \cos\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right) t$$

Batimento

Quando duas funções harmônicas com frequências próximas são somadas, uma coisa curiosa acontece:

$$\begin{aligned} x_1 &= X\cos\omega t \\ x_2 &= X\cos(\omega+\delta)t, \qquad \delta << \omega \end{aligned}$$

Somando as duas equações

$$x(t) = X\left[\cos\omega t + \cos(\omega+\delta)t\right]$$

Sabendo que

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Temos

$$x(t) = 2X\cos\frac{\delta t}{2}\cos\left(\omega+\frac{\delta}{2}\right)t$$

Batimento

Quando duas funções harmônicas com frequências próximas são somadas, uma coisa curiosa acontece:

$$x_1 = X\cos\omega t$$
$$x_2 = X\cos(\omega+\delta)t, \qquad \delta << \omega$$

Somando as duas equações

$$x(t) = X\left[\cos\omega t + \cos(\omega+\delta)t\right]$$

Sabendo que

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Temos

$$x(t) = 2X\cos\frac{\delta t}{2}\cos\left(\omega+\frac{\delta}{2}\right)t$$

Batimento

Quando duas funções harmônicas com frequências próximas são somadas, uma coisa curiosa acontece:

$$x_1 = X\cos\omega t$$
$$x_2 = X\cos(\omega+\delta)t, \qquad \delta << \omega$$

Somando as duas equações

$$x(t) = X\left[\cos\omega t + \cos(\omega+\delta)t\right]$$

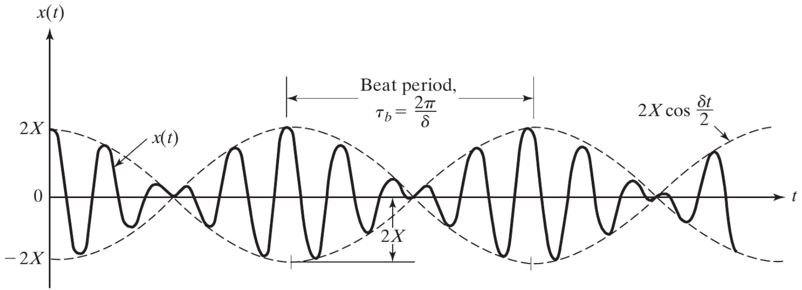
Sabendo que

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Temos

$$x(t) = 2X\cos\frac{\delta t}{2}\cos\left(\omega+\frac{\delta}{2}\right)t$$

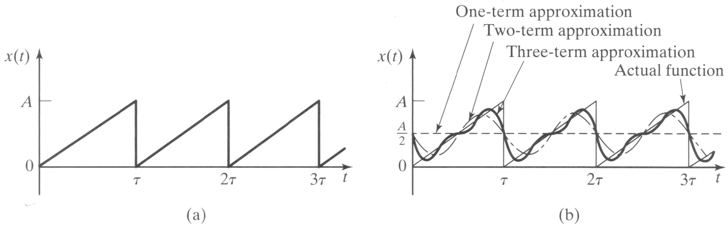
Batimento


x(t)
2X
0
−2X
x(t)
Beat period,
$\tau_b = \frac{2\pi}{\delta}$
$2X \cos \frac{\delta t}{2}$
2X
t

Análise Harmônica

Muitos sistemas físicos interessantes tem movimentos periódicos porem não harmônicos.

Uma maneira de simplificar o problema é usar a Série de Fourier da função periódica.



Séries de Fourier

Para $x(t)$ periódica com período τ, a série de Fourier da função é dada por:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots$$

ou

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Vamos prémultiplicar tudo por $\cos m\omega t$ e $\sin m\omega t$, e integrar de 0 a τ, para $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Séries de Fourier

Para $x(t)$ periódica com período τ, a série de Fourier da função é dada por:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots$$

ou

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Vamos prémultiplicar tudo por $\cos m\omega t$ e $\sin m\omega t$, e integrar de 0 a τ, para $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Séries de Fourier

Para $x(t)$ periódica com período τ, a série de Fourier da função é dada por:

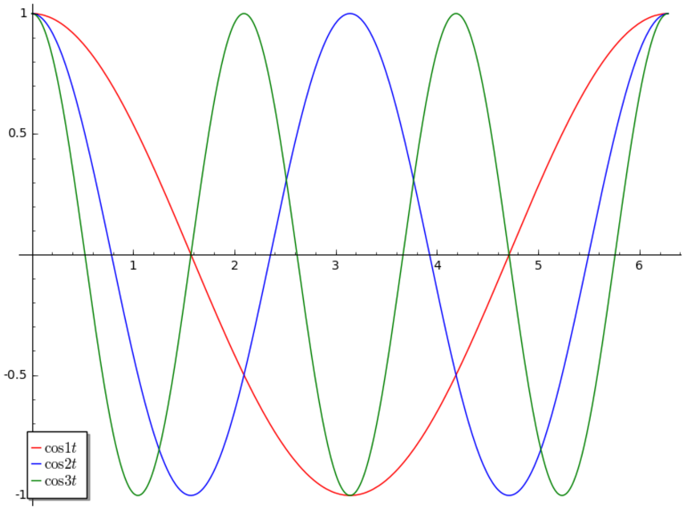
$$\begin{aligned} x(t) = \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots \\ &+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots \end{aligned}$$

ou

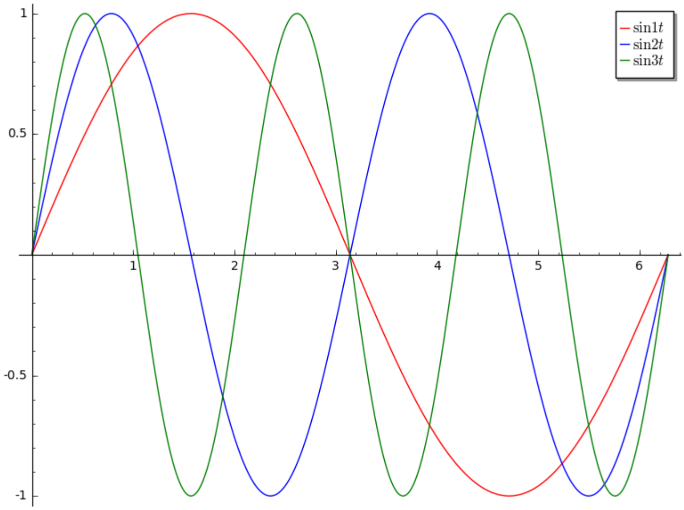
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Vamos prémultiplicar tudo por $\cos m\omega t$ e $\sin m\omega t$, e integrar de 0 a τ, para $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Harmônicas do Cosseno



Harmônicas do Seno



Cálculo de Coeficientes

$$\int_0^{\tau} \cos(m\omega t) x(t)\, dt =$$

$$\int_0^{\tau} \cos(m\omega t) \frac{a_0}{2}\, dt +$$

$$\int_0^{\tau} \cos(m\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\, dt$$

$$\int_0^{\tau} \sin(m\omega t) x(t)\, dt =$$

$$\int_0^{\tau} \sin(m\omega t) \frac{a_0}{2}\, dt +$$

$$\int_0^{\tau} \sin(m\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\, dt$$

Cálculo de Coeficientes

Para $m = 0$

$$\int_0^\tau x(t)\,dt =$$

$$\int_0^\tau \frac{a_0}{2}\,dt +$$

$$\int_0^\tau \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\,dt$$

mas,

$$\int_0^\tau \cos n\omega t\,dt = \int_0^\tau \sin n\omega t\,dt = 0$$

para $n = 1{,}2,\ldots.$

Cálculo de Coeficientes

Da ortogonalidade das funções trigonométricas:

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

Cálculo de Coeficientes

Da ortogonalidade das funções trigonométricas:

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

Cálculo de Coeficientes

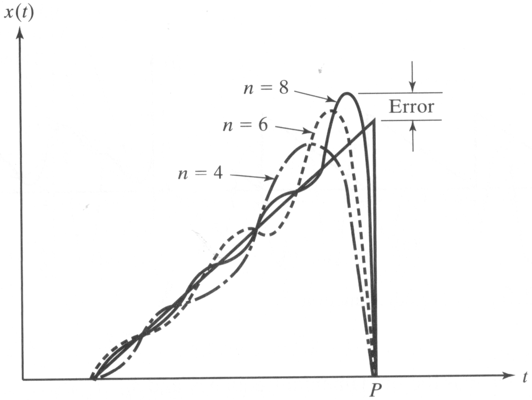
Da ortogonalidade das funções trigonométricas:

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

Fenômeno de Gibbs



Espectro de Frequências

As funções harmônicas

$$a_n \cos n\omega t \qquad \text{e} \qquad b_n \sin_n \omega t$$

são harmônicas de ordem n de $x(t)$.
Estas harmônicas tem período $\frac{\tau}{n}$.

Plotando as amplitudes destas funções em função da frequência, temos o espectro de frequências.

Espectro de Frequências

As funções harmônicas

$$a_n \cos n\omega t \qquad \text{e} \qquad b_n \sin_n \omega t$$

são harmônicas de ordem n de $x(t)$.
Estas harmônicas tem período $\frac{\tau}{n}$.

Plotando as amplitudes destas funções em função da frequência, temos o espectro de frequências.

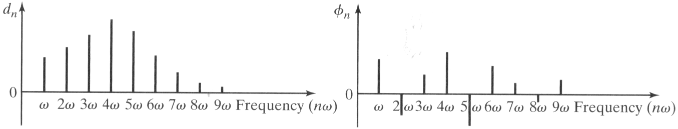
Espectro de Frequências

As funções harmônicas

$$a_n \cos n\omega t \qquad \text{e} \qquad b_n \sin_n \omega t$$

são harmônicas de ordem n de $x(t)$.
Estas harmônicas tem período $\frac{\tau}{n}$.

Plotando as amplitudes destas funções em função da frequência, temos o espectro de frequências.



Representação nos Domínios do Tempo e Frequência